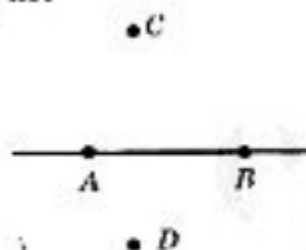


Розділ 1. Найпростіші геометричні фігури та їх властивості

§ 1. Точки, прямі, промені

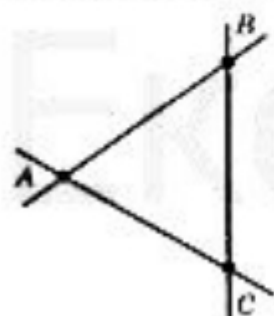
1. 1) Прямій m належать точки: B, D, N ;
2) на прямій m не лежать точки: M, A, C .
Відповідь: $B \in m, D \in m, N \in m, M \notin m, A \notin m, C \notin m$.

2.



Відповідь: пряма AB або BA .

3.



4. 1)

2)

або

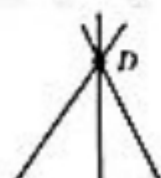


5. На мал. Зображено промені: AP, AR, AQ, AS та доповняльні промені AP і AQ, AS і AR .

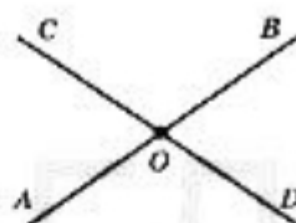
9.

	Пряма XY	Пряма YZ	Пряма XZ	Пряма MX
Точка X	$X \in XY$	$X \notin YZ$	$X \in XZ$	$X \in MX$
Точка Y	$Y \in XY$	$Y \in YZ$	$Y \notin XZ$	$Y \in MX$
Точка Z	$Z \notin XY$	$Z \in YZ$	$Z \in XZ$	$Z \notin MX$
Точка L	$L \notin XY$	$L \in YZ$	$L \notin XZ$	$L \notin MX$
Точка M	$M \in XY$	$M \notin YZ$	$M \notin XZ$	$M \in MX$
Точка N	$N \notin XY$	$N \notin YZ$	$N \in XZ$	$N \notin MX$

10.

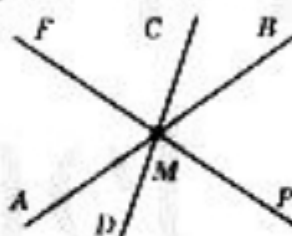


6.



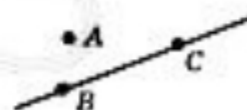
1) промені: OC, OD, OA, OB ; 2) доповняльні промені: OC і OD, OA і OB .

7.

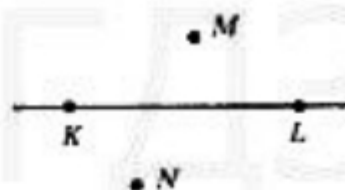
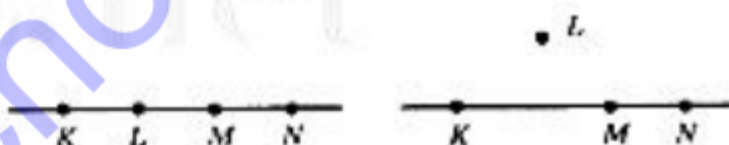


Через т. M можна провести безліч прямих.

8. 1) Через три точки не завжди можна провести пряму;

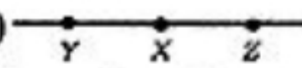


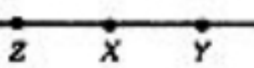
2) через чотири точки не завжди можна провести пряму.


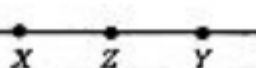


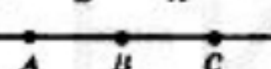
11.



12. 1) 

або 

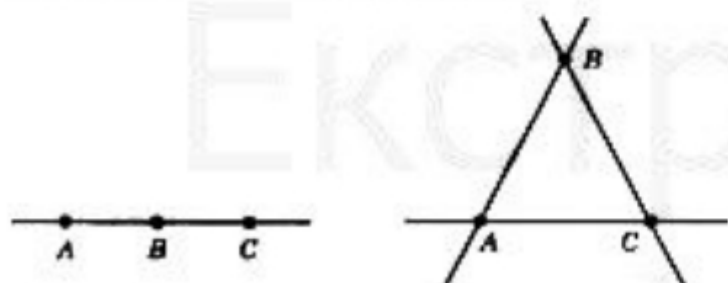
2)  або 

13. 

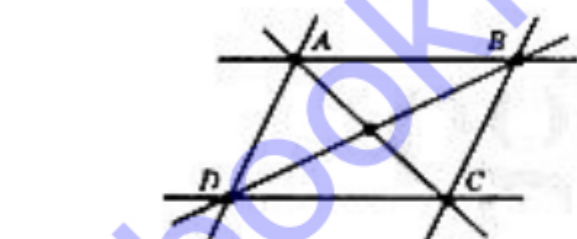
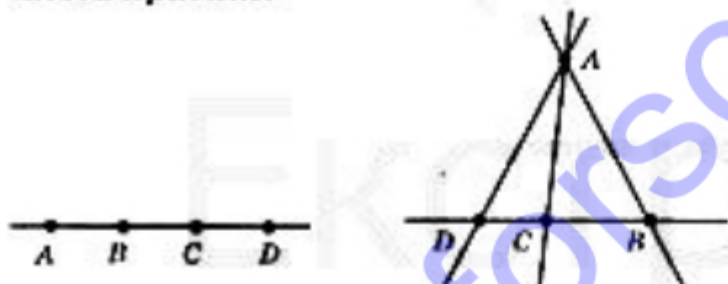
Одержали промені: $AB(AC)$, BA , $BC(CA)$.

14. 1) промені AB і BA не можуть бути доповняльними, оскільки вони не мають спільного початку; 2) промені QP і QR можуть бути доповняльними, якщо точки P , Q і R лежать на одній прямій.

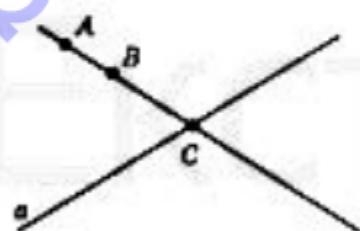
15. 1) Три точки можуть визначити або одну пряму, або три прямих;



2) Чотири точки можуть визначати або одну пряму, або чотири прямих, або шість прямих.





16. 1)



2)

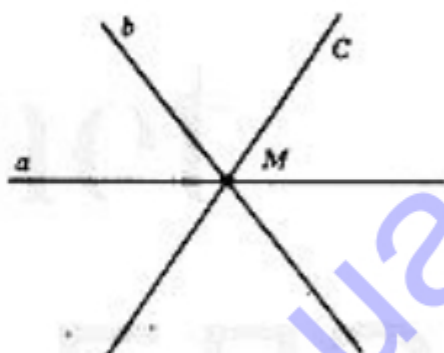


а)  б) 

18. На мал. 22 зображено 18 променів: на прямій XU — 6 променів, на прямій YZ — 6 променів, на промені XZ — 6 променів.

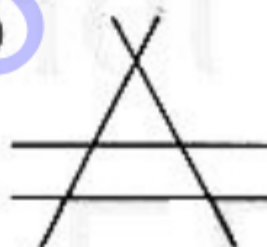
19. Якщо промені OA і OB — доповняльні, то точки O , A і B лежать на одній прямій.

20.

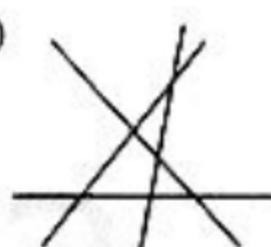


Якщо через т. M провести три прямих, то утвориться шість променів (по два промені на кожній прямій). Якщо через т. M провести n прямих, то утвориться $2n$ променів (по два промені на кожній прямій).

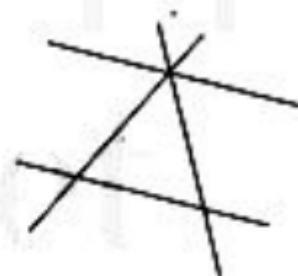
21. 1)



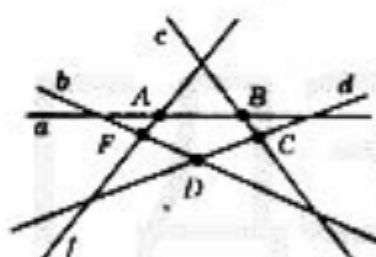
2)



Чотири прями можуть мати три точки перетину.



22.



Кожну з даних прямих перестинають чотири прями. Всього утворилося $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ точок перетину.

Якщо на прямій позначено одну точку, то утвориться два промені. Якщо на прямій позначено дві точки, то утвориться чотири промені. Якщо на прямій позначено n точок, утвориться $2n$ променів.

Застосуйте на практиці

24. 1) Київ, Дніпропетровськ, Запоріжжя; 2) Київ, Дніпропетровськ, Херсон, Черкаси; 3) Житомир, Луганськ, Луцьк, Рівне; 4) Київ.

25. Оскільки через дві точки можна провести тільки одну пряму згідно з властивістю прямої, то лінійка буде правильною, якщо лінії будуть збігатися. Якщо ж лінії не збігаються, то лінійка виготовлена неправильно.

26. Спочатку ставлять віхи в точках A і B . Третю віху ставлять так, щоб віхи, які стоять у точках A і B , закривали її від спостерігача, який знаходиться в точці C . Наступну віху ставлять так, щоб її закривали віхи, які стоять у точках B і C , і т. д. Таким способом можна побудувати (провісити) пряму на місцевості.

27. На одній прямій повинні знаходитися око, мушка і центр мішені.

§ 2. Відрізки та їх вимірювання

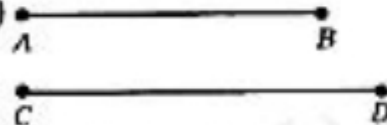
28. 1) Кінці відрізка MN : M і N ; внутрішні точки: A , O , B . 2) Кінці відрізка AN : A і N ; внутрішні точки: O і B . 3) Кінці відрізка AB : A і B ; внутрішня точка: O .

29. 

Утворилося три відрізки: AB , AC , BC .

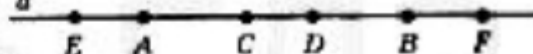
30. 

$KL = 3,5$ см; $MN = 4$ см; $KL < MN$.

31. 1) 

32. 

$OP = AB$; $OF = BC$; $OM = AC$.

33. 

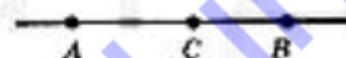
Утворилися відрізки: AE , CE , DE , BE , FE , AC , AD , AB , AF , CD , CB , CF , DB , DF , BF .

34. 1) $AC = 3$ см, $BD = 20$ мм = 2 см, $KL = 0,3$ дм = 3 см. $AC = KL > BD$.

2) $AC = 0,01$ дм = $0,1$ см, $BD = 10$ см, $KL = 1$ мм = $0,1$ см. $AC = KL < BD$.

3) $AC = 4,2$ мм = $0,42$ см, $BD = 0,42$ дм = $4,2$ см, $KL = 0,42$ см. $AC = KL < BD$.

35. $PO = PT + TQ = 0,3$ дм + 30 мм = 3 см + 3 см = 6 см.

36. 


$AB > AC$, оскільки відрізок AC є частиною відрізка AB .

37. 

1) $KN = MN - MK = a - b = 6$ см - $4,5$ см = $1,5$ см.

2) $KN = a - b = 0,3$ дм - 20 мм = 3 см - 2 см = 1 см.

3) $KN = a - b = 40$ мм - $1,5$ см = 4 см - $1,5$ см = $2,5$ см.

38. 

AC	10 см	$6,7$ см	$2,2$ дм
AB	$5,5$ см	$4,3$ см	16 см
BC	45 мм	$2,4$ см	6 см

$AC = AB + BC = 5,5$ см + 45 мм = $5,5$ см + $4,5$ см = 10 см.

$AB = AC - BC = 6,7$ см - $2,4$ см = $4,3$ см.

$BC = AC - AB = 2,2$ дм - 16 см = 22 см - 16 см = 6 см.

12 см = 3,5 см + 8,5 см, то точка C лежить між точками A і B .

40. 1) Якщо точка B лежить на відрізку AC , то $AC = AB + BC$. Але $10 \text{ см} \neq AB + 14 \text{ см}$. Отже, точка B не лежить на відрізку AC .

2) Якщо точка B лежить на відрізку AC , то $AC = AB + BC$. Оскільки $11 \text{ см} = 4 \text{ см} + 7 \text{ см}$, то точка B лежить на відрізку AC .

41. 1) Якщо точки A, B, C лежать на одній прямій, то найбільший із відрізків AC, AB, BC дорівнює сумі двох інших. Оскільки за умовою найбільший із заданих відрізків $AB = 17 \text{ см}$, а сума двох інших $AC + BC = 6,5 \text{ см} + 10,5 \text{ см} = 17 \text{ см}$, то точки A, B, C лежать на одній прямій.

2) Якщо точки A, B, C лежать на одній прямій, то найбільший з відрізків AC, AB, BC дорівнює сумі двох інших. Оскільки за умовою найбільший відрізок дорівнює $1,5 \text{ дм}$, а сума двох інших $AC + BC = 0,6 \text{ дм} + 1 \text{ дм} = 1,6 \text{ дм}$. $1,5 \text{ дм} \neq 1,6 \text{ дм}$, то точки A, B, C не лежать на одній прямій.

42. 1) 

На промені BA від його початку можна відкласти тільки один відрізок даної довжини.

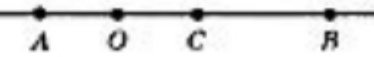
2) На доповняльних променях BA і BC від їх спільного початку можна відкласти два відрізки даної довжини (один на промені BA і один на промені BC).

43.

AB	9 см	86 мм	16,6 мм
AO	4,5 см	43 мм	8,3 мм
OB	4,5 см	43 мм	8,3 мм

AB	0,9 дм	0,86 дм	0,166 дм
AO	0,45 дм	0,43 дм	0,083 дм
OB	0,45 дм	0,43 дм	0,083 дм

AB	0,09 м	0,086 м	0,0166 м
AO	0,045 м	0,043 м	0,0083 м
OB	0,045 м	0,043 м	0,0083 м

44. 

Якщо $AB = 8 \text{ см}$, то

$$AC = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 8 \text{ см} = 4 \text{ см},$$

$$AO = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot 4 \text{ см} = 2 \text{ см},$$

$$OB = AB - AO = 8 \text{ см} - 2 \text{ см} = 6 \text{ см}.$$

Відповідь: $AO = 2 \text{ см}$; $OB = 6 \text{ см}$.

45. 

1) Точка D лежить на відрізках: $AE, AD, BE, CE, BD, CD, ED$.

2) Точка C не лежить на відрізках AB і DE .

46.



Існує шість відрізків з кінцями в точках A, B, C, D : AB, AC, AD, BC, CD, BD .

47. 

Нехай $BC = x \text{ см}$, тоді $AC = 3x \text{ см}$. За властивістю вимірювання відрізків маємо: $AB = AC + BC$, $x + 3x = 8$; $4x = 8$; $x = 2$. Отже, $BC = 2 \text{ см}$, $AC = 3 \times 2 = 6 \text{ (см)}$.

Відповідь: 2 см і 6 см .

48. $AB = CD$ за умови, що $BC = BD$.

49. 1) Оскільки $BC = 2 \text{ дм} = 20 \text{ см}$, а $AB + AC = 16 \text{ см} + 4 \text{ см} = 20 \text{ см}$, тобто виконується умова $BC = AB + AC$, то точка A лежить між точками B і C .

2) Оскільки $AB + BC = AC$, то точка B лежить між точками A і C .

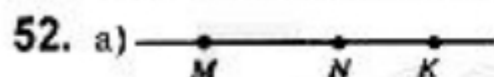
3) Оскільки $BA + AC = BC$, то точка A лежить між точками B і C .

4) Оскільки $BA = BC - AC$, то $BC = BA + AC$. Отже, точка A лежить між точками B і C .

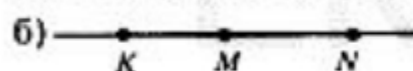
50. Оскільки $AM + MB = AB$, то точка M лежить між точками A і B . Оскільки $AM = MB$, то точка M — середина відрізка AB .



$$AC = AB - BC = 6 \text{ см} - 5 \text{ см} = 1 \text{ см}.$$

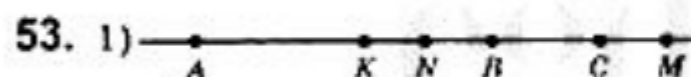


$$MK = MN + NK = 14 + 16 = 30 \text{ (см)};$$



$$MK = NK - MN = 16 - 14 = 2 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 30 см або 2 см.



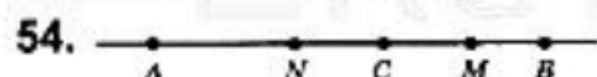
$$BC = AC - BA = 40 \text{ мм} - 30 \text{ мм} = 10 \text{ мм}.$$

$$2) AN = NC - AC : 2 = 40 \text{ мм} : 2 = 20 \text{ мм};$$

$$AK = KB = AB : 2 = 30 \text{ мм} : 2 = 15 \text{ мм};$$

$$KN = AN - AK = 20 \text{ мм} - 15 \text{ мм} = 5 \text{ мм}.$$

Відповідь: 1) 10 мм; 2) 5 мм.



Нехай $AB = 18 \text{ см}$, AC , BC — частини відрізка AB , N — середина відрізка AC , M — середина відрізка BC .

$$NC = \frac{1}{2} AC, CM = \frac{1}{2} BC, \text{ тоді}$$

$$NM = NC + CM = \frac{1}{2} AC + \frac{1}{2} BC =$$

$$= \frac{1}{2} (AC + BC) = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 9 см.



Точка K — середина відрізка AB ,

$$KB = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ см} = 1 \text{ см}.$$

Точка M — середина відрізка CD ,

$$CM = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} (AD - AC) = \frac{1}{2} \cdot (9 - 5) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \text{ (см)}.$$

$$KM = KB + BC + CM = 1 \text{ см} + 3 \text{ см} + 2 \text{ см} = 6 \text{ см}.$$

57. Оскільки точки A, B, C лежать на одній прямій і точки B, C, D лежать на одній прямій, то ці прямі мають спільні точки B і C . Згідно з властивістю прямої, ці прямі збігаються. Отже, точки A, B, C і D лежать на одній прямій.

58. Нехай відрізок AB лежить на прямій a , а відрізок CD лежить на прямій b . Оскільки відрізки AB і CD мають дві спільні точки, то і прямі a і b мають також дві спільні точки. Тоді, згідно з властивістю прямої, прямі a і b збігаються. Отже, відрізки AB і CD лежать на одній прямій.



Утворилося 3 відрізки: AB, AC, BC ;

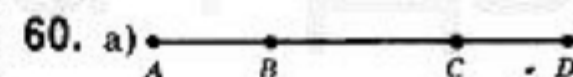


Утворилося 6 відрізків: AC, AD, AB, CD, CB, DB ;



Утворилося 10 відрізків: $AC, AD, AF, AB, CD, CF, CB, DF, DB, FB$.

2) Якщо на відрізку вказано n точок, то всього утвориться $(n+1) + n + (n-1) + \dots + 2 + 1$ відрізків або $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ відрізків.

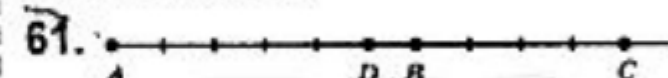


$$BD = BC + CD = BC + AB = AC = 5 \text{ см};$$



$$BD = CD - BC = AB - BC = AC = 5 \text{ см}.$$

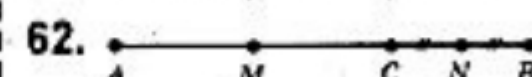
Відповідь: 5 см.



$$1) DB = AB - AD = AB - (AC - CD) = AB - AC + CD = 6 - 10 + 5 = 1 \text{ (см)}.$$

$$2) AD = AC - CD = 10 - 5 = 5 \text{ (см)}.$$

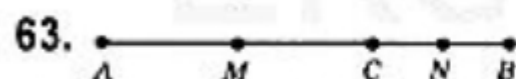
Відповідь: 1) 1 см; 2) 5 см.



$$MN = MC + CN = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}CB =$$

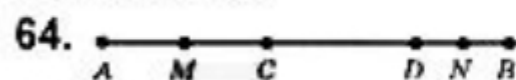
$$= \frac{1}{2}(AC + CB) = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot m = \frac{m}{2}.$$

Відповідь: $\frac{m}{2}$.



M — середина відрізка AC , тоді $AC = 2MC$.
 N — середина відрізка CB , тоді $CB = 2CN$.
 $AB = AC + CB = 2MC + 2CN = 2(MC + CN) =$
 $= 2 \times MN = 2 \times n = 2n$.

Відповідь: $2n$.



$AM + NB = AB - MN = 16 - 14 = 2$ (см).
 $CD = MN - MC - DN = MN - (MC + DN) =$
 $= MN - (AM + NB) = 14 - 2 = 12$ см.

Відповідь: 12 см.



За умовою $AB = BC$, $CK = KD$, $DL = LF$,
 $FN = NM$, $AM = 24$ см, $BN = 20$ см.
 $AB + NM = AM - BN = 24 - 20 = 4$ (см).
 $BC + FN = 4$ см.

$$KL = KD + DL = \frac{1}{2}CD + \frac{1}{2}DF =$$

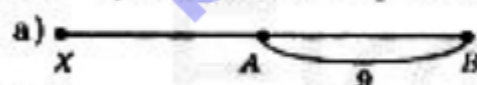
$$= \frac{1}{2}(CD + DF) = \frac{1}{2}CF =$$

$$= \frac{1}{2}(BN - BC - FN) = \frac{1}{2}(BN - (BC + FN)) =$$

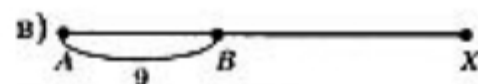
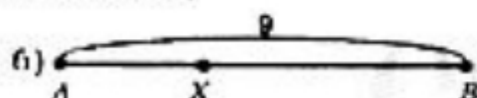
$$= \frac{1}{2} \cdot (20 - 4) = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$$
 (см).

Відповідь: 8 см.

66. 1) Розглянемо три випадки:

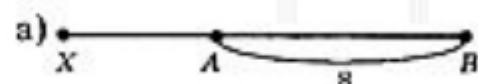


Шукана точка лежить ліворуч від т. A ,
тоді $2AX = XB$, або $2AX = AX + AB$. Врахо-
вуючи, що $AB = 9$ см, маємо: $2AX - AX = 9$,
 $AX = 9$ см;

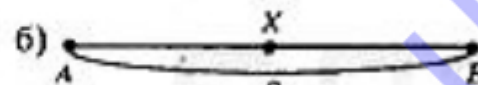


Якщо точка X лежить праворуч точки
 B , то такий випадок неможливий, бо
 $AX = AB + BX$, тобто $AX > BX$, а за умо-
вою $AX < BX$.

2) Розглянемо три випадки:



Випадок (шукана точка X розташова-
на ліворуч точки A) неможливий, бо
 $AX + BX = AX + AX + AB = 2AX + AB =$
 $= 2AX + 8$, тобто $AX + BX > 8$ см;



Нехай точка X лежить між точками A
і B , тоді $AX + BX = AB = 8$. Отже, будь-
яка внутрішня точка відрізка AB буде
шуканою.

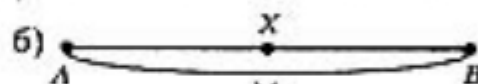


Випадок (шукана точка X розташова-
на праворуч точки B) неможливий, бо
 $AX + BX = AB + BX + BX = AB + 2BX =$
 $= 8 + 2BX$, тобто $AX + BX > 8$ см.

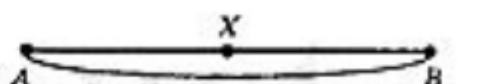
3) Розглянемо три випадки:

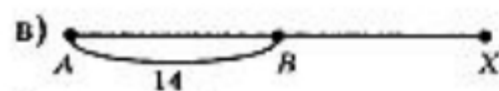


Випадок (шукана точка X знаходиться
праворуч від точки A) неможливий, бо
 $XA - XB = XA + AB - XA = AB$, але за
умовою $XB - XA = 2$ см, а $AB = 14$ см.



Нехай точка X розташована між точ-
ками A і B . Якщо $XB - XA = 2$ см, тоді
 $AB - XA - XA = 2$, $14 - 2XA = 2$; $2XA = 14 - 2$;
 $2XA = 12$; $XA = 6$ см.





Випадок (шукана точка X знаходиться праворуч точки B) неможливий, бо $XA - XB = AB + XB - XB = AB$, але за умовою $XB - XA = 2$ см, а $AB = 14$ см.

67. Відстань від Києва до Сум дорівнює 480 км $- 140$ км $= 340$ км.

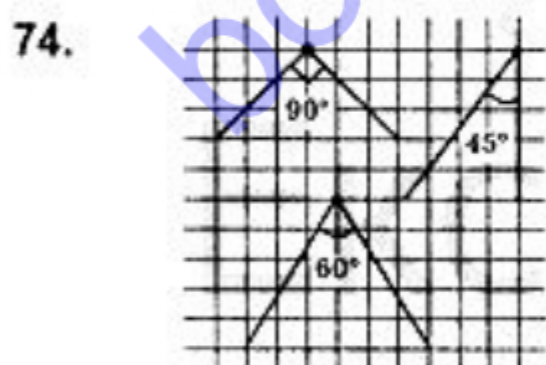
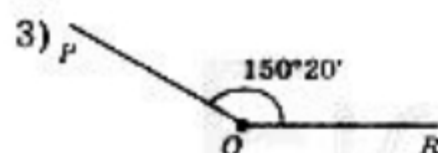
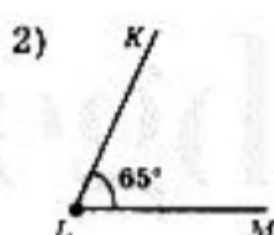
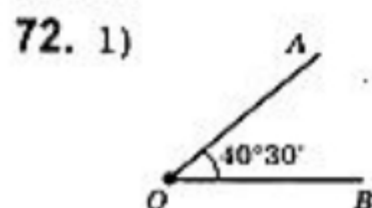
69. 1) Людина перебуває на відстані менше 5 км і більше 4 км від будинку;

2) Людина перебуває на відстані менше 4 км і більше 3 км від будинку.

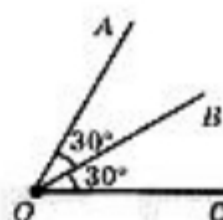
§ 3. Кути та їх вимірювання

70. $\angle PAS, \angle PAR, \angle SAR$.

71. 1) $\angle COD, \angle DOB, \angle DOA$; 2) $\angle COB, \angle COA$; 3) $\angle BOD, \angle BOC, \angle BOA$; 4) $\angle DOA, \angle COA$.



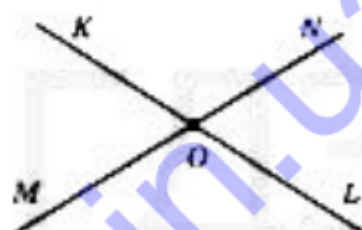
76.



77. 1) Чотири: $\angle EAD, \angle EAC, \angle DAB, \angle CAB$; 2) чотири: $\angle CBA, \angle ABK, \angle NBK, \angle CBN$; 3) вісім: $\angle FCM, \angle MCB, \angle BSA, \angle ACF$ і чотири розгорнутих кути.

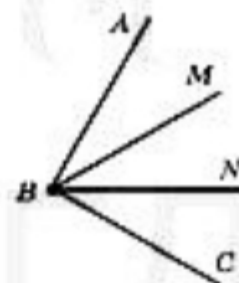
78. Так, у них спільна вершина, оскільки кути мають спільну сторону — промінь, отже початки променів співпадають.

79.



Ні, наприклад $\angle KOM$ і $\angle NOL$ мають спільну вершину O , проте сторони цих кутів не мають спільної сторони.

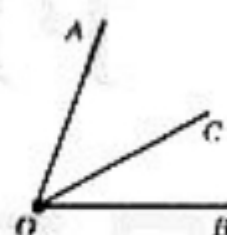
80.



Утворилися кути: $\angle ABM, \angle ABN, \angle ABC, \angle MBN, \angle MBC, \angle NBC$.

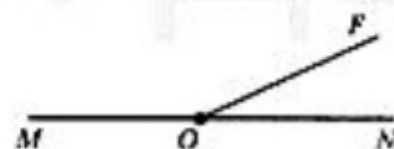
81. 1) $\angle B < \angle A < \angle C$; 2) $\angle A = \angle B < \angle C$; 3) $\angle A = \angle B < \angle C$.

82.



1) $\angle AOB = \angle AOC + \angle BOC = 23^\circ + 47^\circ = 70^\circ$;
2) $\angle AOC = \angle AOB - \angle BOC = 82^\circ - 41^\circ = 41^\circ$.

83.



$$2) \alpha = n^\circ; \beta = 50^\circ; \gamma = \frac{n^\circ}{2}; \alpha = \beta + \gamma;$$

$$n = 50 + \frac{n}{2}; 2n = 100 + n; n = 100.$$

$$\text{Отже, } \alpha = 100^\circ; \gamma = 100^\circ : 2 = 50^\circ.$$

$$3) \alpha = 120^\circ; \beta = n^\circ; \gamma = n^\circ + 40^\circ.$$

$$120 = n + n + 40; 120 = 2n + 40; 2n = 80;$$

$$n = 40. \text{ Отже, } \beta = 40^\circ, \gamma = 80^\circ.$$

$$4) \alpha = n^\circ; \beta = \frac{n^\circ}{2}; \gamma = 120^\circ. n = \frac{n}{3} + 120;$$

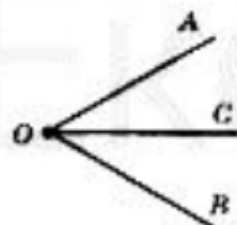
$$3n = n + 360; 2n = 360; n = 180.$$

$$\text{Отже, } \alpha = 180^\circ, \beta = 60^\circ.$$

$$\text{Відповідь: 1) } \beta = 60^\circ, \gamma = 30^\circ; 2) \alpha = 100^\circ,$$

$$\gamma = 50^\circ; 3) \beta = 40^\circ, \gamma = 80^\circ; 4) \alpha = 180^\circ, \beta = 60^\circ.$$

85.



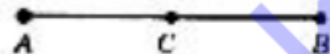
Якщо промінь OC проходить між сторонами кута AOB , то $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$.

1) Оскільки $10^\circ \neq 45^\circ + 35^\circ$, то промінь OC не проходить між сторонами кута AOB .

2) Оскільки $79^\circ = 23^\circ + 56^\circ$, то промінь OC проходить між сторонами кута AOB .

3) Оскільки $49^\circ \neq 92^\circ + 43^\circ$, то промінь OC не проходить між сторонами кута AOB .

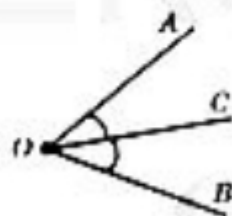
86.



1) Від променя CA в один бік від нього можна відкласти тільки один кут даної градусної міри.

2) Від доповняльних променів у точці в один бік від них можна відкласти два кути даної градусної міри — по одному під кожного променя.

87.



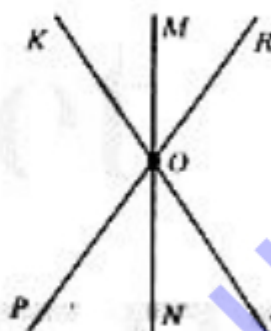
$$\angle BOC = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 174^\circ = 87^\circ.$$

$$3) \text{ Якщо } \angle BOC = 65^\circ, \text{ то } \angle AOB = 2 \times \angle BOC = 2 \times 65^\circ = 130^\circ.$$

$$4) \text{ Якщо } \angle AOB = 82^\circ, \text{ то}$$

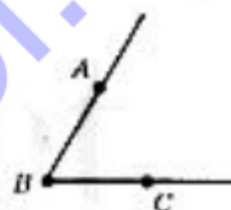
$$\angle AOC = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 82^\circ = 41^\circ.$$

88.



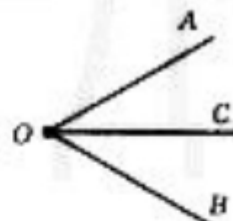
Утворилося шість розгорнутих кутів: два кути KOL , два кути MON , два кути POR .

89.



$\angle ABC$ не може бути розгорнутим, тоді б точки A, B, C лежали на одній прямій.

90.



1) Нехай $\angle AOC = x^\circ$; тоді $\angle BOC = x^\circ + 20^\circ$, і за властивістю вимірювання кутів маємо: $\angle AOB = \angle AOC + \angle BOC$, $62 = x + x + 20$; $2x = 42$; $x = 21$. Отже, $\angle AOC = 21^\circ$, $\angle BOC = 21^\circ + 20^\circ = 41^\circ$.

2) Нехай $\angle BOC = x^\circ$, тоді $\angle AOC = x^\circ + 50^\circ$. За властивістю вимірювання кутів маємо: $\angle AOB = \angle AOC + \angle BOC$, $80 = x + 50 + x$; $2x = 30$; $x = 15$. Отже, $\angle BOC = 15^\circ$, $\angle AOC = 65^\circ$.

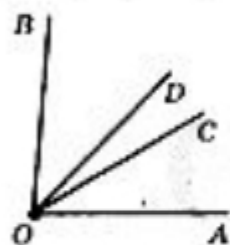
Відповідь: 1) 41° ; 2) 15° і 65° .

91.



- 1) $\angle COD = \angle AOB - (\angle AOC + \angle BOD) = 180^\circ - (60^\circ + 70^\circ) = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$,
 2) $\angle AOC = \angle AOB - (\angle COD + \angle BOD) = 180^\circ - (41^\circ + 69^\circ) = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$,
 3) $\angle BOD = \angle AOB - \angle AOD = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$,
 $\angle COD = \angle BOC - \angle BOD = 130^\circ - 70^\circ = 60^\circ$.
 Відповідь: 1) 50° ; 2) 70° ; 3) 60° .

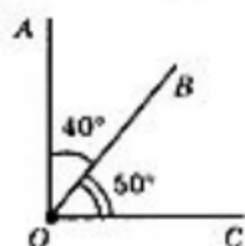
92.



- 1) $\angle BOD = \angle AOB - \angle AOD = 85^\circ - 46^\circ = 39^\circ$,
 2) $\angle BOC = \angle AOB - \angle AOC = 85^\circ - 31^\circ = 54^\circ$,
 3) $\angle COD = \angle AOD - \angle AOC = 46^\circ - 31^\circ = 15^\circ$.
 Відповідь: 1) 39° ; 2) 54° ; 3) 15° .

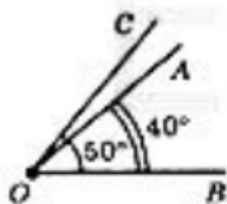
93. Дві інші сторони можуть утворювати кут або 90° , або 10° .

а)



$$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC = 40^\circ + 50^\circ = 90^\circ;$$

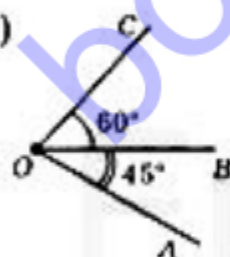
б)



$$\angle AOC = \angle COB - \angle AOB = 50^\circ - 40^\circ = 10^\circ.$$

Відповідь: 90° або 10° .

94. а)

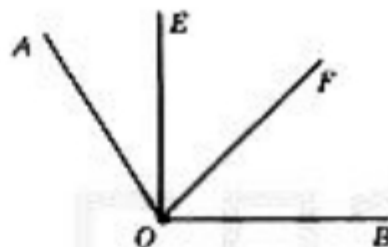


$$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ;$$

б)



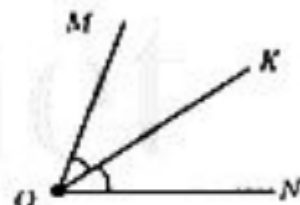
95.



$$\angle EOF = \angle AOB - \angle AOE - \angle BOF = 120^\circ - 25^\circ - 45^\circ = 50^\circ.$$

Відповідь: 50° .

96.



$\angle MON < 180^\circ$, OK — бісектриса,

$$\angle MOK = \frac{1}{2} \angle MON < 90^\circ.$$

- 1) Кут $МОК$ не може бути прямим.
 2) Кут $МОК$ може бути гострим.
 3) Кут $МОК$ не може бути тупим.

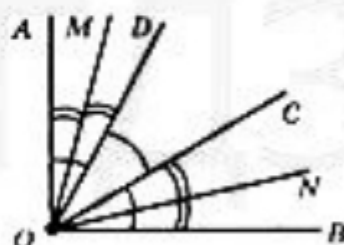
97. 1) Мал. 61. Оскільки $\angle AOC = \angle BOD$, то $\angle AOC - \angle BOC = \angle BOD - \angle BOC$, тоді $\angle AOB = \angle COD$.

2) Мал. 62. Оскільки $\angle AOC = \angle BOD$, то $\angle AOC + \angle BOC = \angle BOD + \angle BOC$, тоді $\angle AOB = \angle COD$.

98. Оскільки $\angle AOC = \angle BOC$, то OC — бісектриса кута AOB і $\angle AOD = \angle BOF$ — за умовою, тоді $\angle AOC - \angle AOD = \angle BOC - \angle BOF$ або $\angle COD = \angle FOC$, тобто OC — бісектриса кута DOF .

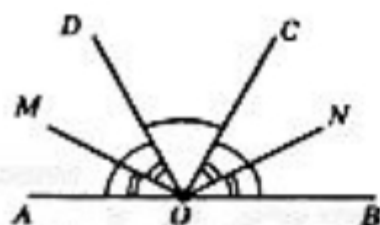
99. Оскільки $\angle DOB = \angle AOF$ і $\angle DOC = \angle COF$, тоді $\angle DOC - \angle DOB = \angle COF - \angle AOF$ або $\angle COB = \angle COA$, тобто OC — бісектриса кута AOB .

100. 1)



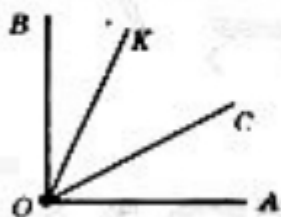
$$\angle AOD = \angle DOC = \angle COB = 90^\circ : 3 = 30^\circ.$$

2)



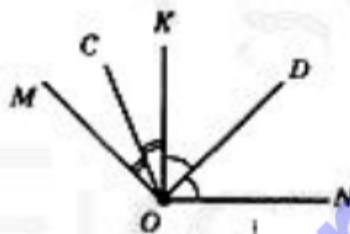
$\angle AOD = \angle DOC = \angle COB = 180^\circ : 3 = 60^\circ$,
 $\angle AOM = \angle MOD = \angle CON = \angle NOB = 60^\circ : 2 = 30^\circ$,
 $\angle MON = \angle MOD + \angle DOC + \angle CON = 30^\circ + 60^\circ + 30^\circ = 120^\circ$.
 Відповідь: 1) 60° ; 2) 120° .

101.



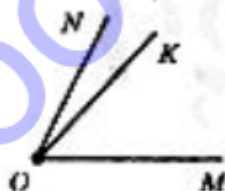
$\angle BOC = \angle AOB - \angle AOC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$,
 $\angle BOK = \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$,
 $\angle KOA = \angle AOB - \angle BOK = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.
 Відповідь: 30° і 60° .

102.



$\angle KOD = \angle KON : 2 = 100^\circ : 2 = 50^\circ$,
 $\angle COK = \angle MOK : 2 = 46^\circ : 2 = 23^\circ$,
 $\angle COD = \angle COK + \angle KOD = 23^\circ + 50^\circ = 73^\circ$.
 Відповідь: 73° .

103.

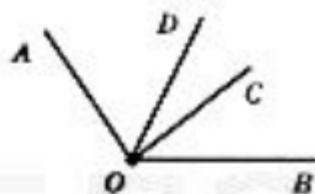


Нехай $\angle NOK = x^\circ$, тоді $\angle MOK = 5x^\circ$;
 $x + 5x = 60$; $6x = 60$; $x = 10$.
 Отже, $\angle NOK = 10^\circ$, $\angle MOK = 10^\circ \times 5 = 50^\circ$.
 Відповідь: $\angle NOK = 10^\circ$; $\angle MOK = 50^\circ$.

104.

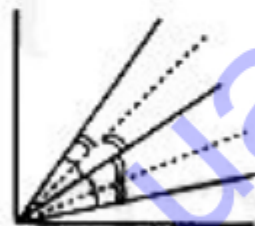


105.



$\angle AOD = \angle BOD = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$.
 $\angle BOC = \angle AOB - \angle AOC = 120^\circ - 80^\circ = 40^\circ$.
 $\angle DOC = \angle BOD - \angle BOC = 60^\circ - 40^\circ = 20^\circ$.
 Відповідь: 20° .

106.



Якщо промені розбивають кут α на $2n$ рівні частини, то градусна міра кожної з них $\frac{\alpha}{2n}$. Бісектриси сусідніх кутів утворюють кут, який складається з двох половин кутів, поділених бісектрисами, тобто дорівнює одному куту. Отже, кут між бісектрисами сусідніх кутів $\frac{\alpha}{2n}$.

1) якщо $\alpha = 180^\circ$, кут дорівнює

$$\frac{180^\circ}{2n} = \frac{90^\circ}{n};$$

2) якщо $\alpha = 90^\circ$, кут дорівнює $\frac{90^\circ}{2n} = \frac{45^\circ}{n}$;3) якщо $\alpha = 120^\circ$, кут дорівнює

$$\frac{120^\circ}{2n} = \frac{60^\circ}{n};$$

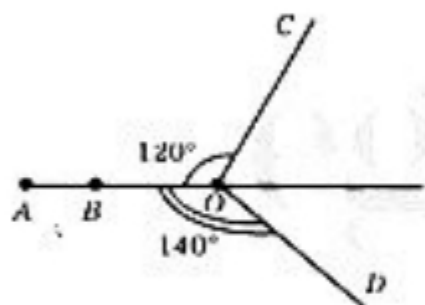
4) якщо $\alpha = 60^\circ$, кут дорівнює $\frac{60^\circ}{2n} = \frac{30^\circ}{n}$.

Відповідь: 1) $90^\circ : n$; 2) $45^\circ : n$; 3) $60^\circ : n$; 4) $30^\circ : n$.

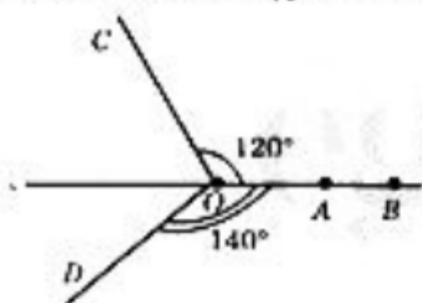
107. Розглянемо різні випадки розміщення точок A, B, O на прямій.



1. Точка O лежить на прямій між точками A і B . У цьому випадку промінь OB проходить між сторонами кута COD , тоді: $\angle COD = \angle COB + \angle DOB$, $\angle COB = \angle AOB - \angle AOC$; $\angle COB = 180^\circ - 120^\circ$; $\angle COB = 60^\circ$. $\angle DOB = \angle AOB - \angle AOD$; $\angle DOB = 180^\circ - 140^\circ$; $\angle DOB = 40^\circ$. Тоді $\angle COD = 60^\circ + 40^\circ$; $\angle COD = 100^\circ$.



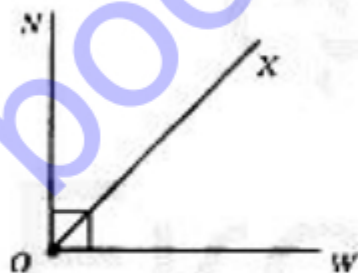
2. Точка B лежить на прямій між точками A і O . Ні промінь OA , ні промінь OB не проходять між сторонами $\angle COD$. $\angle COD = 100^\circ$ (розв'язання проведіть самостійно за аналогією до 1-го випадку).



3. Точка A лежить на прямій між точками O і B . Ні промінь OA , ні промінь OB не проходять між сторонами $\angle COD$. $\angle COD = 100^\circ$ (дивись 1-й випадок).

Застосуйте на практиці

108.

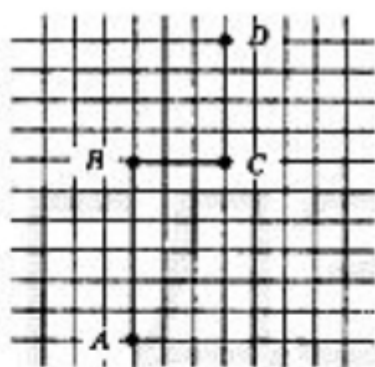


$$\angle NOX = \frac{1}{2} \angle NOW = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ.$$

Відповідь: 45° .

109

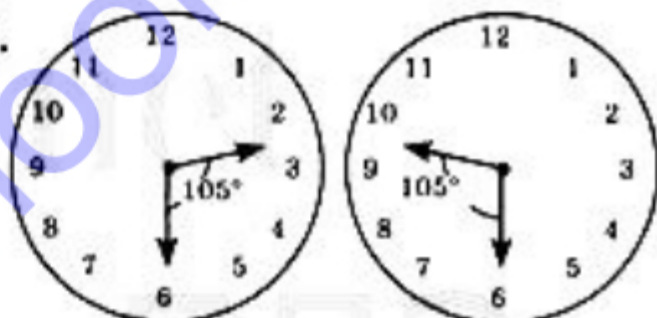
110.



1) $AC = 4,1$ км. 2) $AD = 6,6$ км.

111. Один край аркуша паперу прикладають до сторони кута так, щоб вершина кута співпала з краєм аркуша. На аркуші відмічається точка, в якій друга сторона кута перетинає суміжну сторону. Аналогічну процедуру виконують з іншим кутом. Якщо відмічені точки не співпадають, то більшим кутом буде той кут, мітка від якого знаходиться вище.

112.



Кут між сусідніми цифрами циферблата дорівнює $180^\circ : 6 = 30^\circ$. Оскільки хвилинна стрілка показує цифру 6, то годинна стрілка знаходиться між цифрами 2 і 3 або між цифрами 9 і 10. Отже, зараз 14 год 30 хв (або 2 год 30 хв) чи 21 год 30 хв (або 9 год 30 хв).

Тестові завдання

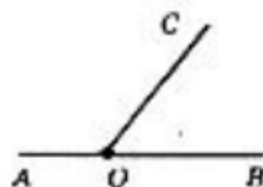
1. Б; 2. Г; 3. Б; 4. В; 5. Г.

§ 4. Суміжні кути

113. 1) Кути CBD і ABD — суміжні;
2) кути LMN і EFK — не є суміжними.

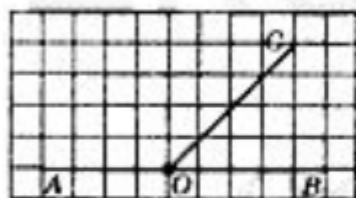
114.

115.



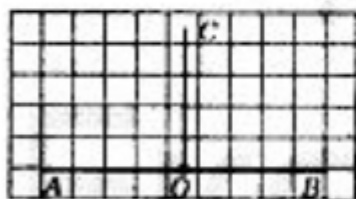
$\angle BOC$ і $\angle AOC$ — суміжні, $\angle BOC = 70^\circ$,
 $\angle AOC = 110^\circ$.

116. 1)



$\angle BOC = 45^\circ$, $\angle AOC = 135^\circ$.

2)



$\angle BOC = 90^\circ$, $\angle AOC = 90^\circ$.

117. 1) $\angle ABD = 180^\circ - \angle CBD = 180^\circ - 41^\circ = 139^\circ$.

2) $\angle OTK = 180^\circ - \angle STO = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$.

120.

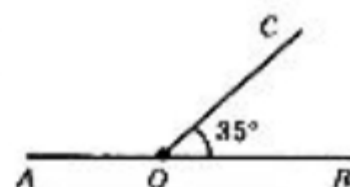
α	10°	160°	30°	140°	50°	120°	70°	100°
β	170°	20°	150°	40°	130°	60°	110°	80°
$\beta - \alpha$ $\alpha < 90^\circ$	160°		120°		80°		40°	
$\alpha - \beta$ $\alpha > 90^\circ$		140°		100°		60°		20°
$\alpha - \beta$ $\beta < 90^\circ$		140°		100°		60°		20°
$\beta - \alpha$ $\beta > 90^\circ$	160°		120°		80°		40°	

121. 1) Оскільки $\alpha + \alpha + 20^\circ = 180^\circ$, то $2\alpha = 160^\circ$, $\alpha = 160^\circ : 2 = 80^\circ$. Отже, $\angle XOY = 80^\circ$, $\angle YOZ = 80^\circ + 20^\circ = 100^\circ$.

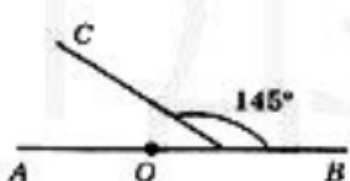
2) Оскільки $\beta + \beta - 78^\circ = 180^\circ$, то $2\beta = 258^\circ$, $\beta = 129^\circ$. Отже, $\angle OAK = 129^\circ$, $\angle KAT = 129^\circ - 78^\circ = 51^\circ$.

122. 1) Нехай гострий кут дорівнює x° , тоді суміжний з ним тупий кут дорівнює $x + 30^\circ$. За теоремою про суму суміжних кутів маємо: $x + x + 30^\circ = 180^\circ$; $2x + 30^\circ = 180^\circ$; $2x = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$; $x = 150^\circ : 2 = 75^\circ$.

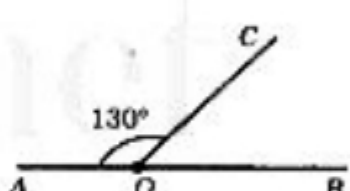
118. 1)



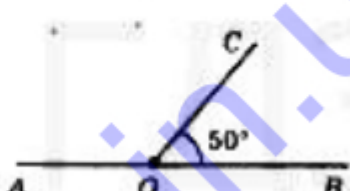
2)



3)



4)



119. 1) $180^\circ - 137^\circ = 43^\circ$; 2) $180^\circ - 54^\circ = 126^\circ$;
 3) $180^\circ - 162^\circ = 18^\circ$; 4) $180^\circ - 23^\circ = 157^\circ$.

2) Нехай гострий кут дорівнює x° , тоді суміжний з ним тупий кут дорівнює $x^\circ + 56^\circ$. За теоремою про суму суміжних кутів маємо: $x + x + 56^\circ = 180^\circ$; $2x = 180^\circ - 56^\circ$; $2x = 124^\circ$; $x = 62^\circ$. Отже, гострий кут дорівнює 62° , а тупий кут дорівнює $180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$.

3) Нехай гострий кут дорівнює x° , тоді суміжний з ним тупий кут дорівнює $x^\circ + 42^\circ$. За теоремою про суму суміжних кутів маємо: $x + x + 42^\circ = 180^\circ$; $2x + 42^\circ = 180^\circ$; $2x = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$; $x = 138^\circ : 2 = 69^\circ$.

Відповідь: 1) 75° і 105° ; 2) 62° і 118° ; 3) 69° і 111° .

123. 1) Оскільки $\alpha + 3\alpha = 180^\circ$, то $4\alpha = 180^\circ$, $\alpha = 45^\circ$. Отже, $\angle KAB = 45^\circ$, $\angle OAK = 45^\circ \times 3 = 135^\circ$.

2) Оскільки $\beta + \frac{\beta}{2} = 180^\circ$, то $2\beta + \beta = 360^\circ$, $3\beta = 360^\circ$, $\beta = 120^\circ$. Отже, $\angle AYX = 120^\circ$, $\angle XYB = 120^\circ : 2 = 60^\circ$.

124. 1) Нехай гострий кут дорівнює x° , тоді суміжний з ним тупий кут дорівнює $4x$. За теоремою про суму суміжних кутів маємо: $x + 4x = 180^\circ$; $5x = 180^\circ$; $x = 36^\circ$. Отже, гострий кут дорівнює 36° , а тупий кут дорівнює $180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$.

2) Нехай гострий кут дорівнює x° , тоді суміжний з ним тупий кут дорівнює $2x^\circ$. За теоремою про суму суміжних кутів маємо: $x + 2x = 180^\circ$; $3x = 180^\circ$; $x = 60^\circ$. Отже, гострий кут дорівнює 60° , а тупий кут дорівнює $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

3) Нехай гострий кут дорівнює x° , тоді тупий кут дорівнює $8x^\circ$. За теоремою про суму суміжних кутів маємо: $x + 8x = 180^\circ$; $9x = 180^\circ$; $x = 20^\circ$. Отже, гострий кут дорівнює 20° , тоді тупий кут дорівнює: $180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$.

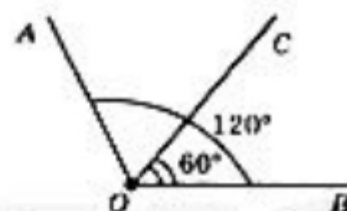
Відповідь: 1) 36° і 144° ; 2) 60° і 120° ; 3) 20° і 160° .

125. 1) Обидва суміжні кути не можуть бути гострими, оскільки їх сума менша 180° , що суперечить теоремі про суму суміжних кутів.

2) Обидва суміжні кути можуть бути прямими, оскільки їх сума дорівнює 180° .

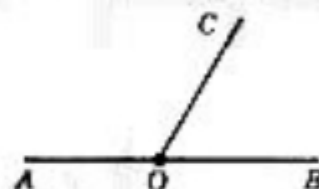
3) Обидва суміжні кути не можуть бути тупими, оскільки їх сума більша 180° , що суперечить теоремі про суму суміжних кутів.

126.



Якщо сума двох кутів дорівнює 180° , то вони необов'язково будуть суміжними.

127.



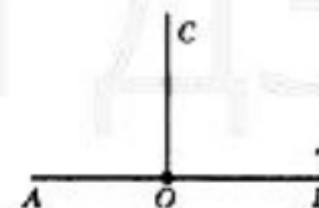
Нехай $\angle COB$ — гострий, тоді $\angle COB < 90^\circ$, тобто $\angle COB = 90^\circ - \alpha$. Згідно з теоремою про суму суміжних кутів маємо: $\angle AOC = 180^\circ - \angle COB = 180^\circ - 90^\circ + \alpha = 90^\circ + \alpha$, тобто $\angle AOC > 90^\circ$. Отже, $\angle AOC$ — тупий.

128.



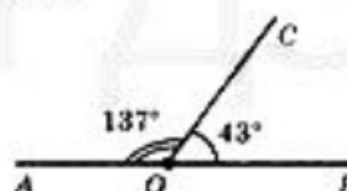
Нехай $\angle AOC$ — тупий, тоді $\angle AOC > 90^\circ$, тобто $\angle AOC = 90^\circ + \alpha$. Згідно з теоремою про суму суміжних кутів маємо: $\angle COB = 180^\circ - \angle AOC = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$, тобто $\angle COB < 90^\circ$. Отже, $\angle COB$ — гострий.

129.

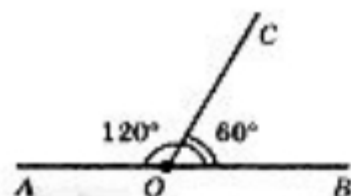


Нехай $\angle AOC$ і $\angle BOC$ — суміжні, $\angle AOC = \angle BOC$. Згідно з теоремою про суму суміжних кутів маємо: $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$. Оскільки $\angle AOC = \angle BOC$, то $\angle AOC + \angle AOC = 180^\circ$; $2\angle AOC = 180^\circ$; $\angle AOC = 180^\circ : 2 = 90^\circ$. Отже, $\angle AOC = \angle BOC = 90^\circ$.

130. 1)



3)



131. 1) Нехай гострий кут дорівнює x° , тоді тупий кут, суміжний з гострим, дорівнює $(x + 30)^\circ$. За теоремою про суму суміжних кутів маємо: $x + x + 30^\circ = 180^\circ$; $2x + 30^\circ = 180^\circ$; $2x = 150^\circ$; $x = 75^\circ$. Отже, шукані кути: 75° і $180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$.

2) Нехай x° — гострий кут, тоді $x + 105^\circ$ — тупий кут, суміжний з гострим. За теоремою про суму суміжних кутів маємо: $x + x + 105^\circ = 180^\circ$; $2x = 75^\circ$; $x = 75^\circ : 2 = 37^\circ 30'$. Отже, шукані кути: $37^\circ 30'$, $180^\circ - 37^\circ 30' = 142^\circ 30'$.

3) Нехай x° — гострий кут, тоді $(x + 67)^\circ$ — суміжний з ним тупий кут. За теоремою про суму суміжних кутів маємо: $x + x + 67^\circ = 180^\circ$; $2x = 113^\circ$; $x = 56^\circ 30'$. Отже, шукані кути: $56^\circ 30'$ і $180^\circ - 56^\circ 30' = 123^\circ 30'$.

4) Оскільки суміжні кути рівні, то величина кожного з них дорівнює 90° .

Відповідь: 1) 75° і 105° ; 2) $37^\circ 30'$ і $142^\circ 30'$; 3) $56^\circ 30'$ і $123^\circ 30'$; 4) 90° і 90° .

132. 1) Нехай гострий кут дорівнює x° , тоді суміжний з ним тупий кут дорівнює $9x^\circ$. За теоремою про суму суміжних кутів маємо: $x + 9x = 180^\circ$; $10x = 180^\circ$; $x = 18^\circ$. Отже, шукані кути: 18° і $18^\circ \times 9 = 162^\circ$.

2) Нехай гострий кут дорівнює x° , тоді суміжний з ним тупий кут дорівнює $11x^\circ$. За теоремою про суму суміжних кутів маємо: $x + 11x = 180^\circ$; $12x = 180^\circ$; $x = 15^\circ$. Отже, шукані кути: 15° і $180^\circ - 15^\circ = 165^\circ$.

3) Оскільки суміжні кути рівні, то кожен з них дорівнює $180^\circ : 2 = 90^\circ$.

4) Нехай гострий кут дорівнює x° , тоді суміжний з ним тупий кут дорівнює $17x^\circ$. За теоремою про суму суміжних кутів маємо: $x + 17x = 180^\circ$; $18x = 180^\circ$;

133. 1) Нехай суміжні кути дорівнюють x° і $9x^\circ$. За теоремою про суму суміжних кутів маємо: $x + 9x = 180^\circ$; $10x = 180^\circ$; $x = 18^\circ$. Отже, шукані кути: 18° і $180^\circ - 18^\circ = 162^\circ$.

2) Нехай суміжні кути дорівнюють x° і $11x^\circ$. За теоремою про суму суміжних кутів маємо: $x + 11x = 180^\circ$; $12x = 180^\circ$; $x = 15^\circ$. Отже, шукані кути: 15° і $180^\circ - 15^\circ = 165^\circ$.

3) Оскільки суміжні кути рівні, то кожний з них дорівнює $180^\circ : 2 = 90^\circ$.

4) Нехай суміжні кути дорівнюють x° і $17x^\circ$. За теоремою про суму суміжних кутів маємо: $x + 17x = 180^\circ$; $18x = 180^\circ$; $x = 10^\circ$. Отже, шукані кути: 10° і $180^\circ - 10^\circ = 170^\circ$.

Відповідь: 1) 18° і 162° ; 2) 15° і 165° ; 3) 90° і 90° ; 4) 10° і 170° .

134. Нехай один із суміжних кутів дорівнює x° , тоді другий дорівнює $\frac{1}{3}x^\circ$.

За теоремою про суму суміжних кутів маємо: $x + \frac{1}{3}x = 180^\circ$; $3x + x = 540^\circ$;

$4x = 540^\circ$; $x = 135^\circ$. Отже, шукані кути: 135° і $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.

2) Нехай один із суміжних кутів дорівнює x° , тоді другий — $\frac{3}{2}x$. За теоремою про суму суміжних кутів маємо:

$x + \frac{3}{2}x = 180^\circ$; $2x + 3x = 360^\circ$; $5x = 360^\circ$; $x = 72^\circ$. Отже, шукані кути 72° і $180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$.

3) Нехай один із суміжних кутів дорівнює x° , тоді другий — $\frac{4}{5}x^\circ$. За теоремою про суму суміжних кутів маємо:

$2 + \frac{4}{5}x = 180^\circ$; $5x + 4x = 900^\circ$; $9x = 900^\circ$; $x = 100^\circ$. Отже, кути дорівнюють: 100° і $180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.

4) Нехай один із суміжних кутів дорівнює x° , тоді другий — $\frac{7}{1}x$. За те-

$15x = 1440^\circ$; $x = 96^\circ$. Отже, шукані кути: 96° і $180^\circ - 96^\circ = 84^\circ$.

Відповідь: 1) 135° і 45° ; 2) 72° і 108° ; 3) 100° і 80° ; 4) 96° і 84° .

135. 1) Нехай один із суміжних кутів дорівнює x° , тоді другий — $0,2x^\circ$. За теоремою про суму суміжних кутів маємо: $x + 0,2x = 180^\circ$; $1,2x = 180^\circ$; $x = 150^\circ$. Отже, шукані кути: 150° і $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.

2) Нехай один із суміжних кутів дорівнює x° , тоді другий — $0,6x^\circ$. За теоремою про суму суміжних кутів маємо: $x + 0,6x = 180^\circ$; $1,6x = 180^\circ$; $x = 112,5^\circ$. Отже, шукані кути: $112^\circ 30'$ і $180^\circ - 112^\circ 30' = 67^\circ 30'$.

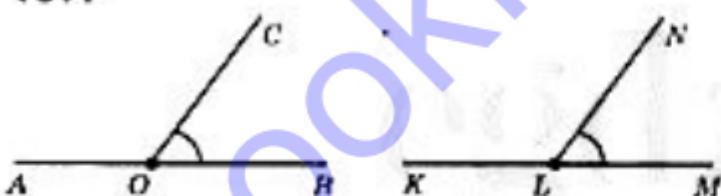
Нехай один із суміжних кутів дорівнює x° , тоді другий — $0,8x^\circ$. За теоремою про суму суміжних кутів маємо: $x + 0,8x = 180^\circ$; $1,8x = 180^\circ$; $x = 100^\circ$. Отже, шукані кути: 100° і $180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.

4) Нехай один із суміжних кутів дорівнює x° , тоді другий — $0,25x^\circ$. За теоремою про суму суміжних кутів маємо: $x + 0,25x = 180^\circ$; $1,25x = 180^\circ$; $x = 144^\circ$. Отже, шукані кути: 144° і $180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$.

Відповідь: 1) 150° і 30° ; 2) $112^\circ 30'$ і $67^\circ 30'$; 3) 100° і 80° ; 4) 144° і 36° .

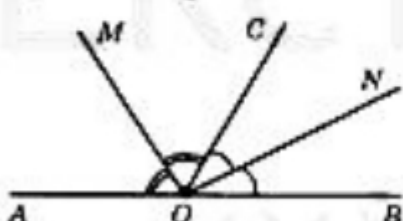
136. $\angle ACD$ і $\angle BCD$, $\angle ACL$ і $\angle BCL$ — суміжні кути.

137.



Нехай $\angle BOC = \angle MLN = \alpha$. Тоді $\angle AOC = 180^\circ - \alpha$, $\angle KLN = 180^\circ - \alpha$. Отже $\angle AOC = \angle KLN$, тобто, якщо кути рівні, то суміжні з ними кути теж рівні.

138.

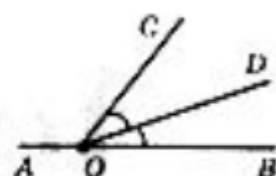


Тоді $\angle MON = \angle MOC + \angle CON =$

$$= \frac{1}{2} \angle AOC + \frac{1}{2} \angle COB = \frac{1}{2} (\angle AOC + \angle COB) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

Отже, бісектриси суміжних кутів утворюють прямий кут.

139.



Нехай $\angle AOC$ і $\angle COB$ — суміжні, $\angle BOD = \angle COD = \alpha$. Тоді $\angle BOC = 2\angle COD = 2\alpha$; $\angle AOC = 180^\circ - \angle BOC = 180^\circ - 2\alpha$.

1) Якщо $\alpha = 15^\circ$, то $\angle BOC = 2 \times 15^\circ = 30^\circ$, $\angle AOC = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

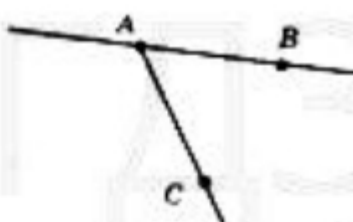
2) Якщо $\alpha = 75^\circ$, то $\angle BOC = 2 \times 75^\circ = 150^\circ$, $\angle AOC = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.

3) Якщо $\alpha = 60^\circ$, то $\angle BOC = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$, $\angle AOC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

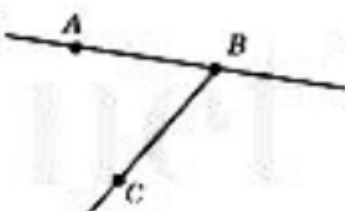
4) Якщо $\alpha = 45^\circ$, то $\angle BOC = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$, $\angle AOC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Відповідь: 1) 30° і 150° ; 2) 150° і 30° ; 3) 120° і 60° ; 4) 90° і 90° .

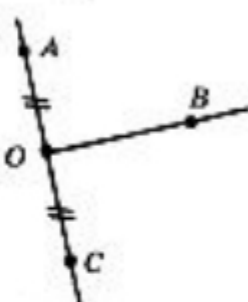
140. 1)



2)



3)



141. 1) Оскільки $\frac{\alpha}{\beta} < 1$, то $\alpha < \beta$.

Отже, α — гострий кут.

2) Оскільки $\frac{\alpha}{\beta} > 1$, то $\alpha > \beta$.

4) Оскільки $\frac{\beta}{\alpha} > 1$, то $\beta > \alpha$.

Отже, α — гострий кут.

142. 1) Якщо $20^\circ \leq \beta \leq 30^\circ$, то найбільше значення α дорівнює $180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$, а найменше значення α дорівнює $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$. Отже, $150^\circ \leq \alpha \leq 160^\circ$.

2) Якщо $120^\circ \leq \beta \leq 130^\circ$, то найбільше значення α дорівнює $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, а найменше значення α дорівнює $180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$. Отже, $50^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$.

3) Якщо $38^\circ \leq \beta \leq 45^\circ$, то найбільше значення α дорівнює $180^\circ - 38^\circ = 142^\circ$, а найменше значення α дорівнює $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. Отже, $135^\circ \leq \alpha \leq 142^\circ$.

4) Якщо $175^\circ \leq \beta \leq 179^\circ$, то найбільше значення α дорівнює $180^\circ - 175^\circ = 5^\circ$, а найменше значення α дорівнює $180^\circ - 179^\circ = 1^\circ$. Отже, $1^\circ \leq \alpha \leq 5^\circ$.

143. Нехай α і β суміжні кути. Знайдемо різницю між сумою $\alpha + \beta$ цих кутів та їх різницею $\alpha - \beta$: $\alpha + \beta - (\alpha - \beta) = \alpha + \beta - \alpha + \beta = 2\beta$. Отже, різниця між сумою і різницею цих кутів дорівнює подвоєному одному куту.

1) Якщо різниця дорівнює 20° , то один дорівнює $20^\circ : 2 = 10^\circ$, а другий $180^\circ - 10^\circ = 170^\circ$.

2) Якщо різниця дорівнює 105° , то один дорівнює $105^\circ : 2 = 52^\circ 30'$, а другий $180^\circ - 52^\circ 30' = 127^\circ 30'$.

3) Якщо різниця дорівнює 49° , то один дорівнює $49^\circ : 2 = 24^\circ 30'$, а другий $180^\circ - 24^\circ 30' = 155^\circ 30'$.

4) Якщо різниця дорівнює 123° , то один дорівнює $123^\circ : 2 = 61^\circ 30'$, а другий $180^\circ - 61^\circ 30' = 118^\circ 30'$.

Відповідь: 1) 10° і 170° ; 2) $52^\circ 30'$ і $127^\circ 30'$; 3) $24^\circ 30'$ і $155^\circ 30'$; 4) $61^\circ 30'$ і $118^\circ 30'$.

144. Нехай α і β суміжні кути, тоді різниця цих кутів дорівнює $\alpha - \beta$, а сума

$\alpha + \beta = 180^\circ$. Отже, $\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha - \beta}{180}$.

суміжних кутів маємо: $\beta + \beta + 120 = 180$; $2\beta = 60$; $\beta = 30$. Тоді $\alpha = 180 - 30 = 150$. Отже, шукані кути: 30° і 150° .

2) Оскільки $\frac{\alpha - \beta}{180} = \frac{3}{4}$, то $\alpha - \beta = 135$, $\alpha = 135 + \beta$. Тоді за теоремою про суму суміжних кутів маємо: $\beta + \beta + 135 = 180$; $2\beta = 45$; $\beta = 22^\circ 30'$. Отже, шукані кути: $22^\circ 30'$ і $180^\circ - 22^\circ 30' = 157^\circ 30'$.

3) Оскільки $\frac{\alpha - \beta}{180} = \frac{4}{5}$, то $\alpha - \beta = 144$, $\alpha = \beta + 144$. Тоді за теоремою про суму суміжних кутів маємо: $\beta + \beta + 144 = 180$; $2\beta = 36$; $\beta = 36 : 2 = 18$. Тоді $\alpha = 180 - 18 = 162$. Отже, шукані кути: 18° і 162° .

4) Оскільки $\frac{\alpha - \beta}{180} = \frac{5}{6}$, то $\alpha - \beta = 150$, $\alpha = \beta + 150$. Тоді за теоремою про суму суміжних кутів маємо: $\beta + \beta + 150 = 180$; $2\beta = 30$; $\beta = 15$. Тоді $\alpha = 180 - 30 = 150$. Отже, шукані кути: 15° і $180^\circ - 15^\circ = 165^\circ$.
Відповідь: 1) 30° і 150° ; 2) $22^\circ 30'$ і $157^\circ 30'$; 3) 18° і 162° ; 4) 15° і 165° .

145. 1) Нехай α і β шукані кути, тоді за умовою $\alpha - (\alpha - \beta) = 30$, або $\beta - (\alpha - \beta) = 30$. Якщо $\alpha - (\alpha - \beta) = 30$, тоді $\alpha - \alpha + \beta = 30$, $\beta = 30$. Отже, шукані кути: 30° і $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

Якщо $\beta - (\alpha - \beta) = 30$, тоді $\beta - \alpha + \beta = 30$, $2\beta - \alpha = 30$, $\alpha = 2\beta - 30$. За теоремою про суму суміжних кутів маємо: $\beta + 2\beta + 30 = 180$; $3\beta + 30 = 180$; $3\beta = 150$; $\beta = 50$. Отже, шукані кути дорівнюють 50° і $180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.

2) Оскільки середнє арифметичне двох суміжних кутів дорівнює 90° , то один з кутів дорівнює $90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$, а другий — $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

3) Оскільки сума суміжних кутів дорівнює 180° , то 25 % суми цих кутів дорівнює $\frac{180^\circ \cdot 25}{100} = 45^\circ$. Тоді один з ку-

тів дорівнює $45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$, другий — $180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$.

4) Нехай α і β суміжні кути. Тоді за

1) Якщо $\alpha - \frac{3(\alpha - \beta)}{2} = 30$, тоді $2\alpha - 3\alpha + 3\beta = 60$; $3\beta - \alpha = 60$; $\alpha = 3\beta - 60$. За теоремою про суму суміжних кутів маємо: $\beta + 3\beta - 60 = 180$; $4\beta = 240$; $\beta = 60$. Отже, шукані кути дорівнюють: 60° і $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

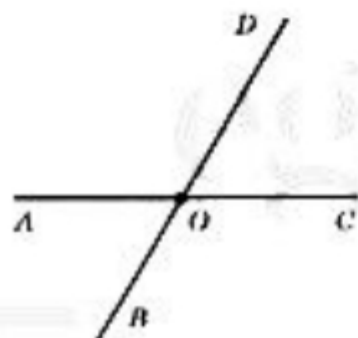
Якщо $\beta - \frac{3(\alpha - \beta)}{2} = 30$, тоді $2\beta - 3\alpha + 3\beta = 60$; $5\beta - 3\alpha = 60$; $5\beta = 3\alpha + 60$; $\beta = \frac{3\alpha + 60}{5}$.

За теоремою про суму суміжних кутів маємо: $\alpha + \frac{3\alpha + 60}{5} = 180$; $5\alpha + 3\alpha + 60 = 900$;

$8\alpha = 840$; $\alpha = 105$. Отже, шукані кути дорівнюють: 105° і $180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$.

Відповідь: 1) 30° і 150° або 70° і 110° ; 2) 120° і 60° ; 3) 75° і 105° ; 4) 60° і 120° або 105° і 75° .

146.



Нехай $\angle AOB$ — даний кут, тоді суміжними з ним будуть кути $\angle BOC$ і $\angle AOD$. Оскільки $\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$ і $\angle AOB + \angle AOD = 180^\circ$, то $\angle BOC = 180^\circ - \angle AOB$, $\angle AOD = 180^\circ - \angle AOB$. $\angle BOC + \angle AOD = 180^\circ - \angle AOB + 180^\circ - \angle AOB = 360^\circ - 2\angle AOB$. Звідси $2\angle AOB = 360^\circ - (\angle BOC + \angle AOD)$.

$$\angle AOB = \frac{360^\circ - (\angle BOC + \angle AOD)}{2} =$$

$$= 180^\circ - \frac{\angle BOC + \angle AOD}{2}.$$

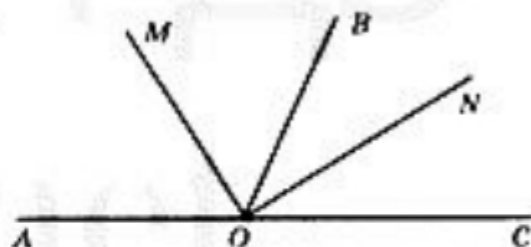
1) Оскільки $\angle BOC + \angle AOD = 80^\circ$, то $\angle AOB = 180^\circ - \frac{80^\circ}{2} = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$.

$$\angle AOB = 180^\circ - \frac{120^\circ}{2} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

4) Оскільки $\angle BOC + \angle AOD = 300^\circ$, то $\angle AOB = 180^\circ - \frac{300^\circ}{2} = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.

Відповідь: 1) 140° ; 2) 70° ; 3) 120° ; 4) 30° .

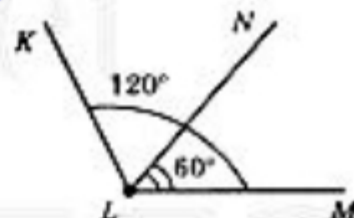
147.



$\angle AOB$ і $\angle BOC$ — суміжні кути, ON — бісектриса кута $\angle BOC$, $\angle BOM = \angle MON$, $\angle MON = 90^\circ$. $\angle AOM = 180^\circ - (\angle MON + \angle NOC) = 180^\circ - (90^\circ + \angle NOC) = 180^\circ - 90^\circ - \angle NOC = 90^\circ - \angle NOC$.

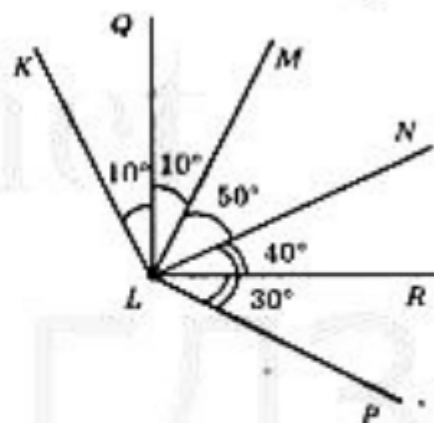
$\angle MOB = \angle MON - \angle BON$, $\angle MOB = 90^\circ - \angle NOC$. Отже, $\angle AOM = \angle MOB = 90^\circ - \angle NOC$, отже OM — бісектриса кута $\angle AOB$.

148.



Твердження неправильне. На мал. $\angle KLM$ і $\angle NLM$ мають спільну вершину L , спільну сторону LN , їх сума дорівнює 180° , але ці кути не суміжні.

149.



Твердження невірне. На мал. $\angle KLM = 20^\circ$, $\angle MLN = 50^\circ$, $\angle NLP = 60^\circ$. Бісектриси $\angle Q$ і $\angle R$ утворюють прямий кут, проте ці кути не суміжні.

то утворені суміжні кути рівні, отже, кожен із них дорівнює 90° , отже, косинець правильний.

151. Щоб визначити азимут, більший за 180° , треба до 180° додати азимут протилежного напрямку. Наприклад, азимут напрямку OK дорівнює 180° , додати азимут напрямку OL , тобто азимут напрямку OK дорівнює $180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$. Азимути напрямків:

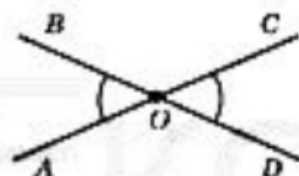
- 1) Київ — Чернігів — 22° ;
- 2) Київ — Полтава — 105° ;
- 3) Київ — Сімферополь — 156° ;
- 4) Київ — Одеса — 180° ;
- 5) Київ — Вінниця — 230° ;
- 6) Київ — Житомир — 266° ;
- 7) Київ — Тернопіль — 255° ;
- 8) Київ — Луцьк — 278° .

§ 5. Вертикальні кути

152. 1) $\angle AYX$ і $\angle BYZ$ — вертикальні;
2) $\angle OLK$ і $\angle MLN$ — не вертикальні.

153. 1) $\angle AOD$ — вертикальний з кутом 1;
2) $\angle AOC$ і $\angle DOB$ — суміжні з кутом 1.

154.



$\angle BOA$ і $\angle COD$ — суміжні.
 $\angle BOA = \angle COD = 60^\circ$.

158.

$\angle 1$	12°	121°	34°	143°	156°	65°	178°	87°
$\angle 2$	12°	121°	34°	143°	156°	65°	178°	87°
Кут між прямими	Так	Ні	Так	Ні	Ні	Так	Ні	Так

159. Мал. 97. $\alpha + \alpha = 100^\circ$; $2\alpha = 100^\circ$;
 $\alpha = 100^\circ : 2 = 50^\circ$.

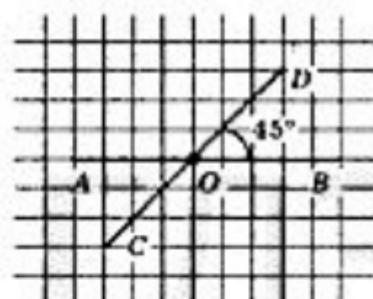
Мал. 98. $\beta + \beta = 220^\circ$; $2\beta = 220^\circ$;
 $\beta = 220^\circ : 2 = 110^\circ$.

Відповідь: 50° і 50° ; 110° і 110° .

160. 1) $30^\circ : 2 = 15^\circ$. Отже, вертикальні кути дорівнюють 15° і 15° .

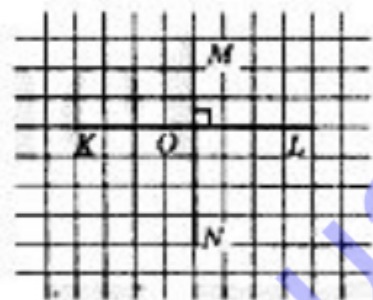
2) $211^\circ : 2 = 105^\circ 30'$. Отже, вертикальні кути дорівнюють $105^\circ 30'$ і $105^\circ 30'$.

155. 1)



$$\angle DOB = \angle COA = 45^\circ;$$

2)



$$\angle MOL = \angle NOK = 90^\circ.$$

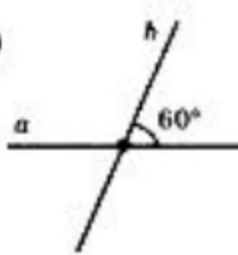
156. $\angle AOB = \angle DOC = 41^\circ$;

$$\angle KOL = \angle MON = 149^\circ.$$

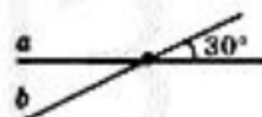
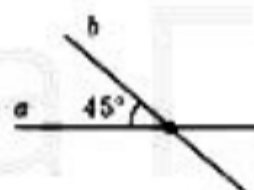
157. 1)



2)

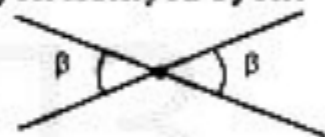


3)

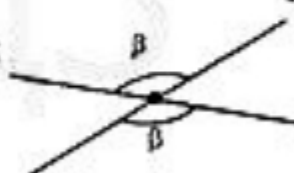


161. Вертикальні кути можуть бути:

1) гострими $\beta < 90^\circ$;



2) тупими $90^\circ < \beta < 180^\circ$;



3) прямими $\beta = 90^\circ$.

162. Мал. 99. $\angle BOC = \angle DOA = 130^\circ$ — як вертикальні кути;
 $\angle BOD = 180^\circ - \angle BOC = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$ — як суміжні кути;
 $\angle AOC = \angle BOD = 50^\circ$ — як вертикальні кути.

Відповідь: 130° ; 50° ; 50° .

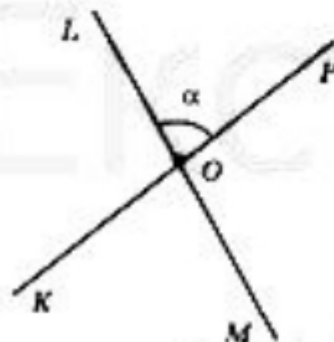
Мал. 100. $\angle COA = \angle BOD = 72^\circ$ — як вертикальні кути;

$\angle BOC = 180^\circ - \angle BOD = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$ — як суміжні кути;

$\angle DOA = \angle BOC = 108^\circ$ — як вертикальні кути.

Відповідь: 72° ; 108° ; 108° .

163.



Якщо $\angle LOP = \alpha$, то $\angle KOM = \alpha$ — як вертикальні кути; $\angle KOL = \angle MOP$ — як вертикальні кути; $\angle KOL = 180^\circ - \angle LOP = 180^\circ - \alpha$.

1) Якщо $\alpha = 40^\circ$, то $\angle KOM = 40^\circ$, $\angle KOL = \angle MOP = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$;

2) якщо $\alpha = 12^\circ$, то $\angle KOM = 12^\circ$, $\angle KOL = \angle MOP = 180^\circ - 12^\circ = 168^\circ$;

3) якщо $\alpha = 25^\circ$, то $\angle KOM = 25^\circ$, $\angle KOL = \angle MOP = 180^\circ - 25^\circ = 155^\circ$.

4) якщо $\alpha = 17^\circ$, то $\angle KOM = 17^\circ$, $\angle KOL = \angle MOP = 180^\circ - 17^\circ = 163^\circ$.

Відповідь: 1) 40° , 140° , 140° ; 2) 12° , 168° , 168° ; 3) 25° , 155° , 155° ; 4) 17° , 163° , 163° .

164. 1) Менший кут дорівнює $(180^\circ - 14^\circ) : 2 = 83^\circ$, більший дорівнює $180^\circ - 83^\circ = 97^\circ$. Отже, утворилися кути: 83° , 97° , 83° , 97° .

2) Менший кут дорівнює $(180^\circ - 56^\circ) : 2 = 62^\circ$, більший дорівнює $180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$. Отже, утворилися кути: 62° ,

4) Менший кут дорівнює $(180^\circ - 70^\circ) : 2 = 55^\circ$, більший дорівнює $180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$. Отже, утворилися кути: 55° , 125° , 55° , 125° .

165. Вертикальні кути: $\angle LFD$ і $\angle AFB$, $\angle LFD$ і $\angle DFB$.

Суміжні кути: $\angle LFD$ і $\angle AFL$, $\angle LFD$ і $\angle DFB$, $\angle AFB$ і $\angle LFA$, $\angle AFB$ і $\angle BFD$.

166. Вертикальні кути: $\angle AOD$ і $\angle BOL$, $\angle AOL$ і $\angle DOB$.

167.



Оскільки вертикальні кути рівні і їх сума більша за один із них на α , то вертикальні кути дорівнюють: 1) 45° і 45° ; 2) 90° і 90° ; 3) 109° і 109° ; 4) 130° і 130° .

168.



1) Якщо $\angle 1 = 105^\circ$, то $\angle 2 = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$. $\angle 2 + \angle 3 = 75^\circ \times 2 = 150^\circ$.

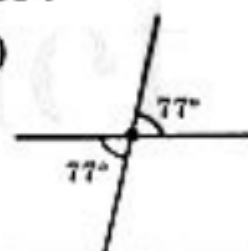
2) Якщо $\angle 1 = 71^\circ 30'$, то $\angle 2 = 180^\circ - 71^\circ 30' = 108^\circ 30'$. $\angle 2 + \angle 3 = 2 \times 108^\circ 30' = 217^\circ$.

3) Якщо $\angle 1 = 93^\circ 35'$, то $\angle 2 = 180^\circ - 93^\circ 35' = 86^\circ 25'$. $\angle 2 + \angle 3 = 2 \times 86^\circ 25' = 172^\circ 50'$.

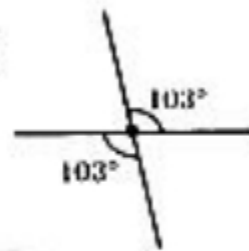
4) Якщо $\angle 1 = 120^\circ 45'$, то $\angle 2 = 180^\circ - 120^\circ 45' = 59^\circ 15'$. $\angle 2 + \angle 3 = 2 \times 59^\circ 15' = 118^\circ 30'$.

Відповідь: 1) 150° ; 2) 217° ; 3) $172^\circ 50'$; 4) $118^\circ 30'$.

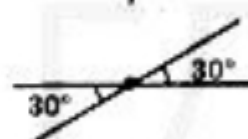
169. 1)



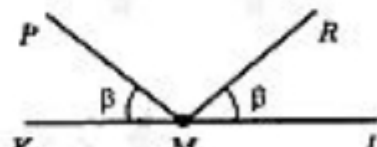
2)



3)



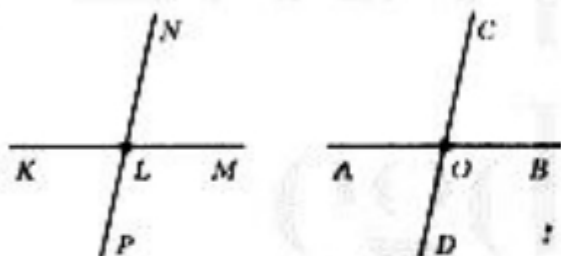
170.



171. Два нерівні кути не можуть бути вертикальними, оскільки вертикальні кути рівні.

172. Вертикальні кути: $\angle LAD$ і $\angle CAB$, $\angle LAC$ і $\angle DAB$, $\angle KCQ$ і $\angle ACB$, $\angle KCA$ і $\angle QCB$, $\angle CBA$ і $\angle EPF$, $\angle CBF$ і $\angle ABE$.

173.



Нехай $\angle NLM = \angle COB$, тоді $\angle KLP = \angle NLM$ — як вертикальні кути, $\angle AOD = \angle COB$ — як вертикальні кути. Оскільки $\angle NLM = \angle COB$ — за умовою, то $\angle KLP = \angle AOD$. Отже, якщо два кути рівні, то вертикальні з ними також рівні.

174. Утворилося 6 пар вертикальних кутів: $\angle KCM$ і $\angle DCL$, $\angle KCB$ і $\angle ACL$, $\angle MCB$ і $\angle ACB$, $\angle MCL$ і $\angle DCK$, $\angle BCL$ і $\angle ACK$, $\angle BCD$ і $\angle ACM$.

Утворилося 12 пар суміжних кутів: $\angle ACK$ і $\angle KCB$, $\angle ACM$ і $\angle MCB$, $\angle ACD$ і $\angle DCB$, $\angle ACL$ і $\angle LCB$, $\angle DCA$ і $\angle ACM$, $\angle DCK$ і $\angle KCM$, $\angle DCL$ і $\angle LCM$, $\angle DCB$ і $\angle BCM$, $\angle KCM$ і $\angle MCL$, $\angle KCB$ і $\angle BCL$, $\angle KCA$ і $\angle ACL$, $\angle KCD$ і $\angle DCL$.

175. При перетині двох прямих утворюється дві пари вертикальних кутів і чотири пари суміжних кутів. Сума будь-яких суміжних кутів дорівнює 180° , а сума двох вертикальних кутів відмінна від 180° . Отже, за умовою задачі задана сума вертикальних кутів.

1) Один із кутів дорівнює $102^\circ : 2 = 51^\circ$, а суміжний з ним кут дорівнює $180^\circ - 51^\circ = 129^\circ$. Отже, утворені кути дорівнюють: $51^\circ, 129^\circ, 51^\circ, 129^\circ$.

2) Один із кутів дорівнює $320^\circ : 2 = 160^\circ$, тоді суміжний з ним кут дорівнює $180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$. Отже, утворені кути дорівнюють: $160^\circ, 20^\circ, 160^\circ, 20^\circ$.

4) Один із кутів дорівнює $182^\circ : 2 = 91^\circ$, тоді суміжний з ним кут дорівнює $180^\circ - 91^\circ = 89^\circ$. Отже, утворені кути дорівнюють: $91^\circ, 89^\circ, 91^\circ, 89^\circ$.

Відповідь: 1) $51^\circ, 129^\circ, 51^\circ, 129^\circ$; 2) $160^\circ, 20^\circ, 160^\circ, 20^\circ$; 3) $119^\circ, 61^\circ, 119^\circ, 61^\circ$; 4) $91^\circ, 89^\circ, 91^\circ, 89^\circ$.

176. При перетині двох прямих утворилося дві пари вертикальних кутів і чотири пари суміжних кутів. Різниця двох вертикальних кутів дорівнює 0° , а різниця двох суміжних кутів (відмінних від прямих) відмінна від 0° . Отже, за умови задачі задана різниця суміжних кутів.

1) Менший кут дорівнює $(180^\circ - 29^\circ) : 2 = 75^\circ 30'$, тоді більший кут дорівнює $180^\circ - 75^\circ 30' = 104^\circ 30'$. Отже, утворилися кути: $75^\circ 30', 75^\circ 30', 104^\circ 30', 104^\circ 30'$.

2) Менший кут дорівнює $(180^\circ - 115^\circ) : 2 = 32^\circ 30'$, тоді більший кут дорівнює $180^\circ - 32^\circ 30' = 147^\circ 30'$. Отже, утворилися кути: $32^\circ 30', 32^\circ 30', 147^\circ 30', 147^\circ 30'$.

3) Менший кут дорівнює $(180^\circ - 107^\circ) : 2 = 36^\circ 30'$, тоді більший кут дорівнює $180^\circ - 36^\circ 30' = 143^\circ 30'$. Отже, утворилися кути: $36^\circ 30', 36^\circ 30', 143^\circ 30', 143^\circ 30'$.

4) Менший кут дорівнює $(180^\circ - 53^\circ) : 2 = 63^\circ 30'$, тоді більший кут дорівнює $180^\circ - 63^\circ 30' = 116^\circ 30'$. Отже, утворилися кути: $63^\circ 30', 63^\circ 30', 116^\circ 30', 116^\circ 30'$.

Відповідь: 1) $75^\circ 30', 75^\circ 30', 104^\circ 30', 104^\circ 30'$; 2) $32^\circ 30', 32^\circ 30', 147^\circ 30', 147^\circ 30'$; 3) $36^\circ 30', 36^\circ 30', 143^\circ 30', 143^\circ 30'$; 4) $63^\circ 30', 63^\circ 30', 116^\circ 30', 116^\circ 30'$.

177. При перетині двох прямих утворюється дві пари вертикальних кутів і чотири пари суміжних кутів. Частка двох вертикальних кутів дорівнює 1 (оскільки вертикальні кути рівні), а частка двох суміжних кутів (відмінних від прямих) не дорівнює 1. Отже, за умовою задачі задана частка суміжних кутів.

1) Менший кут дорівнює $180^\circ : 10 \times 1 = 18^\circ$,

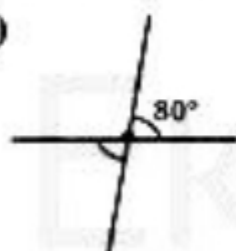
$\times 11 = 165^\circ$. Отже, утворилися кути: 15° , 15° , 165° , 165° .

3) Менший кут дорівнює $180^\circ : 6 \times 1 = 30^\circ$, а більший кут дорівнює $180^\circ : 6 \times 5 = 150^\circ$. Отже, утворилися кути: 30° , 30° , 150° , 150° .

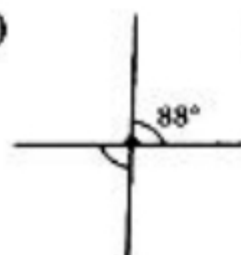
4) Менший кут дорівнює $180^\circ : 18 \times 1 = 10^\circ$, а більший кут дорівнює $180^\circ : 18 \times 17 = 170^\circ$. Отже, утворилися кути: 10° , 10° , 170° , 170° .

Відповідь: 1) 18° , 18° , 162° , 162° ; 2) 15° , 15° , 165° , 165° ; 3) 30° , 30° , 150° , 150° ; 4) 10° , 10° , 170° , 170° .

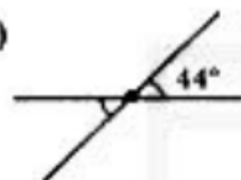
178. 1) $\alpha = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$;



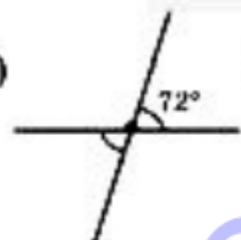
2) $\alpha = 180^\circ - 92^\circ = 88^\circ$;



3) $\alpha = 180^\circ - 136^\circ = 44^\circ$;



4) $\alpha = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$.

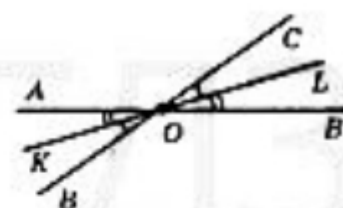


179. 1) Оскільки сума кутів кратна 9 і лежить в межах від 55° до 70° , то ця сума дорівнює 63° . Оскільки вертикальні кути рівні, то кожен з них дорівнює $63^\circ : 2 = 31^\circ 30'$.

2) Оскільки сума кутів кратна 9 і лежить в межах від 111° до 120° , то ця сума дорівнює 117° . Оскільки вертикальні кути рівні, то кожен з них дорівнює $117^\circ : 2 = 58^\circ 30'$.

Відповідь: 1) $31^\circ 30'$, $31^\circ 30'$; 2) $58^\circ 30'$, $58^\circ 30'$; 3) $121^\circ 30'$, $121^\circ 30'$.

180.



Нехай $\angle COB$ і $\angle AOB$ — вертикальні, OL — бісектриса $\angle COB$, OK — бісектриса $\angle AOB$. Доведено, що $\angle KOL = 180^\circ$. Оскільки $\angle COB = \angle AOB$, то $\angle BOL = \angle AOK$ — як половина рівних кутів. Тоді $\angle KOL = \angle AOK + \angle AOC + \angle COL = \angle AOC + (\angle BOL + \angle COL) = \angle AOC + \angle COB = 180^\circ$. Отже, бісектриси вертикальних кутів утворюють розгорнутий кут.

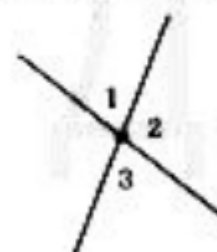
181.



Кількість вертикальних кутів збільшилася на 4 пари, оскільки третя пряма утворює з кожною із даних прямих по 2 пари вертикальних кутів. Всього утворилося 6 пар вертикальних кутів. Кількість суміжних кутів збільшилася на 8 пар, оскільки третя пряма утворює з кожною із даних прямих 4 пари суміжних кутів. Всього утворилося 12 пар суміжних кутів.

Якщо провести четверту пряму, то утвориться $6 + 3 \times 2 = 12$ вертикальних кутів і $12 + 3 \times 4 = 24$ суміжних кутів. Якщо провести п'яту пряму, то утвориться $12 + 4 \times 2 = 20$ вертикальних кутів і $24 + 4 \times 4 = 40$ суміжних кутів.

181.



2) $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \frac{16}{9} \cdot 180^\circ = 320^\circ$, $\angle 1 + (\angle 2 + \angle 3) = 320^\circ$, $\angle 1 + 180^\circ = 320^\circ$, $\angle 1 = 320^\circ - 180^\circ = 140^\circ$. Тоді $\angle 2 = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$. Отже, прямі перетинаються під кутом 40° .

3) $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 0,25 \times 5 \times 180^\circ = 225^\circ$, $\angle 1 + (\angle 2 + \angle 3) = 225^\circ$, $\angle 1 + 180^\circ = 225^\circ$, $\angle 1 = 45^\circ$. Отже, прямі перетинаються під кутом 45° .

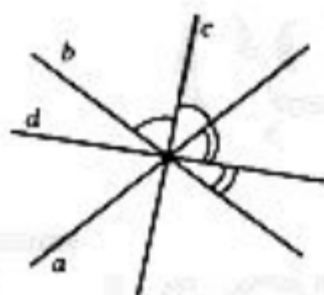
$$4) \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \frac{8}{3} \cdot \frac{\angle 1 + \angle 2}{2},$$

$$\angle 1 + (\angle 2 + \angle 3) = \frac{8}{3} \cdot \frac{180^\circ}{2} = 240^\circ,$$

$\angle 1 + 180^\circ = 240^\circ$, $\angle 1 = 240^\circ - 180^\circ = 60^\circ$. Отже, прямі перетинаються під кутом 60° .

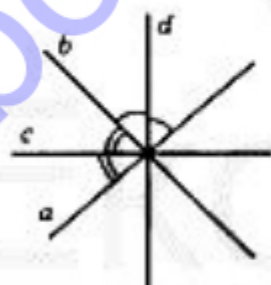
Відповідь: 1) 30° , 2) 40° , 3) 45° , 4) 60° .

183.



Нехай прямі a і b перетинаються, прямі c і d містять бісектриси двох суміжних кутів. Оскільки бісектриси суміжних кутів утворюють прямий кут, то прямі c і d перетинаються під прямим кутом.

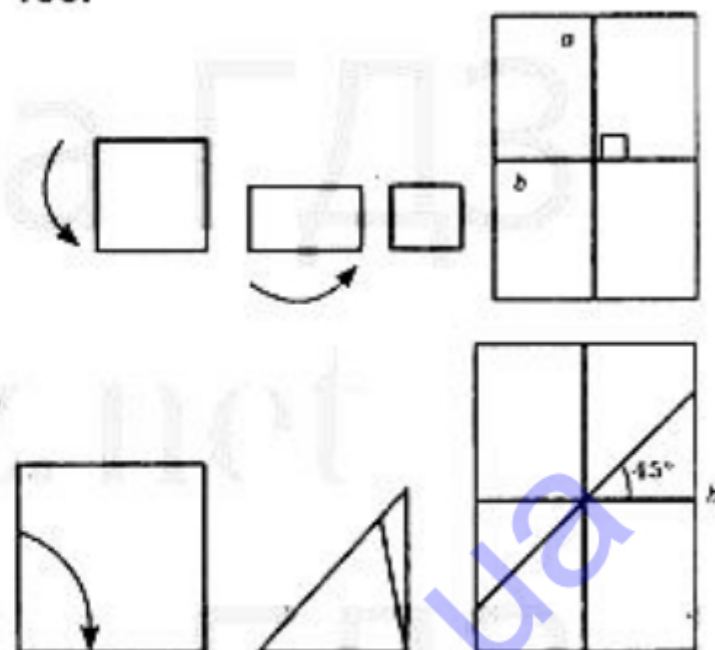
184.



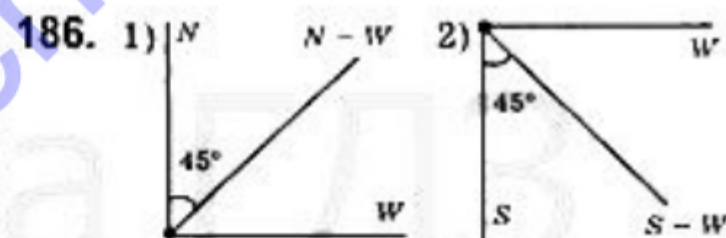
Нехай прямі a і b перетинаються, прямі c і d містять бісектриси утворених вертикальних кутів, а отже містять бісектриси

Застосуйте на практиці

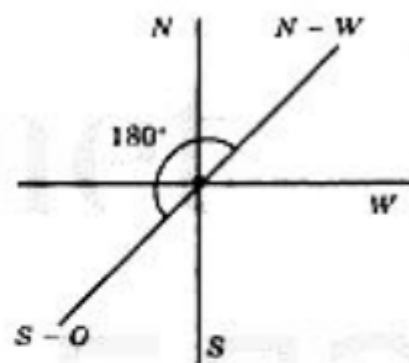
185.



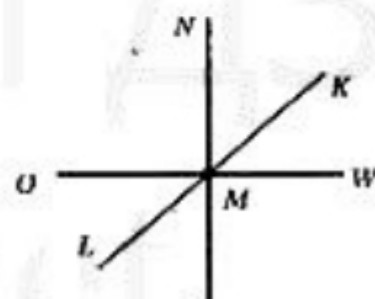
Спочатку слід зігнути аркуш паперу навпіл, а потім ще раз зігнути навпіл. Щоб на згинах отримати дві прямі, що перетинаються під кутом 45° , треба спочатку зігнути аркуш паперу навпіл, потім ще раз зігнути навпіл, а потім зігнути по бісектрисі кута.



3)



187.



кута між напрямком «північ» і «захід» є промінь ML . Оскільки кути NMW і OMS — вертикальні, а промені MK і ML — їх бісектриси, то $\angle LMK$ — розгорнутий (бісектриси вертикальних кутів утворюють розгорнутий кут). Отже, бісектриси цих напрямків лежать на одній прямій.

§ 6. Перпендикулярні прямі

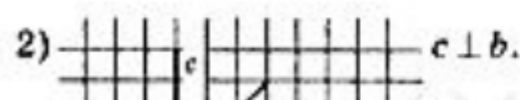
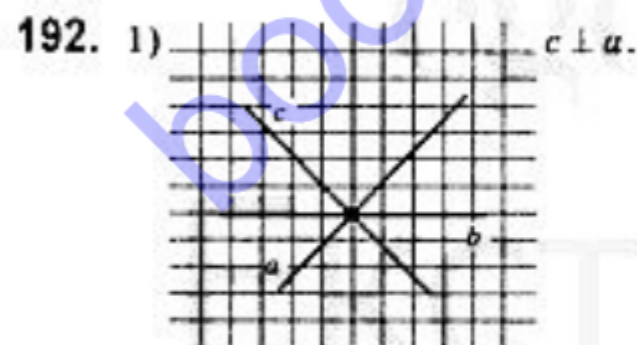
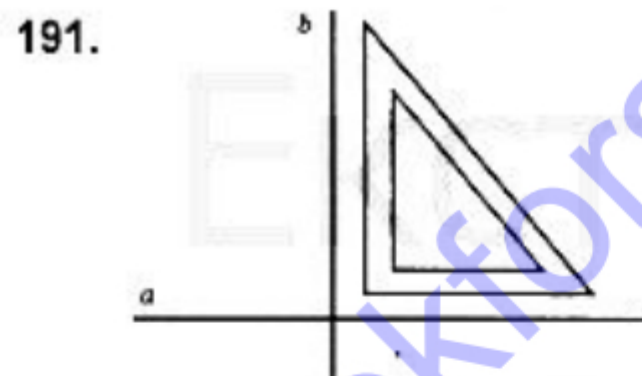
188. 1) На мал. 115 $a \perp b$ перпендикулярні, $a \perp b$. 2) На мал. 116 m і n не перпендикулярні.

189. 1) Відрізок AB — перпендикулярний до прямої a на мал. 117 і мал. 118.

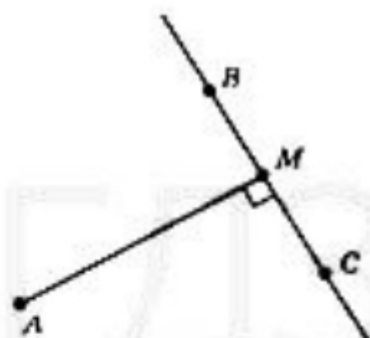
2) Відрізок AB є перпендикуляром до прямої a на мал. 117.

3) Довжина відрізка AB є відстанню від т. A до прямої a на мал. 117.

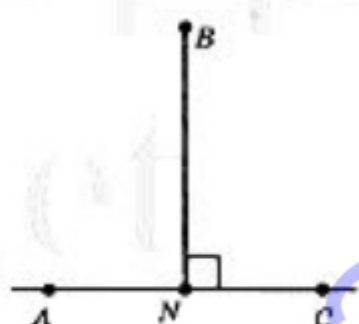
190. Ні, перпендикуляр до прямої — це відрізок (згідно означення перпендикуляра).



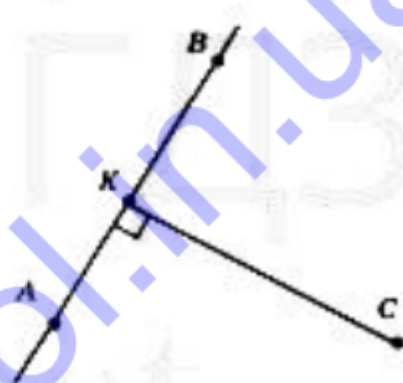
193. 1)



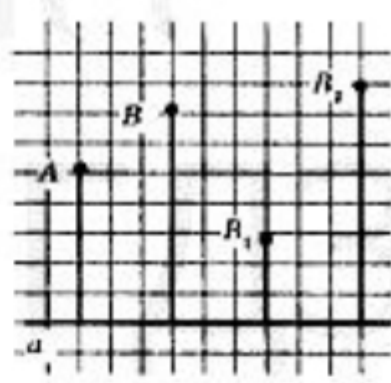
2)



3)

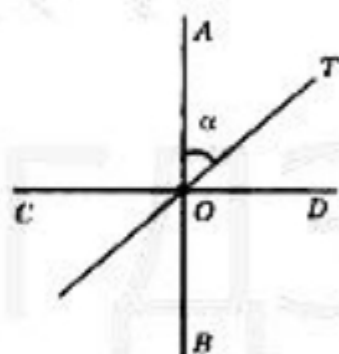


194.



195. Мал. 120: $90^\circ - 41^\circ = 49^\circ$.
Мал. 121: $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

196.



Кут між прямими CD і OT дорівнює куту $\angle COT$. $\angle COT = 90^\circ - \angle BOT = 90^\circ - \alpha$.

197.	α	45°	57°	25°	38°	13°
	β	45°	43°	65°	32°	77°
	$\alpha + \beta$	90°	100°	90°	70°	90°
	$a \perp c?$	Так	Ні	Так	Ні	Так

198. 1) $PA = 6$; 2) $BA = 8$.

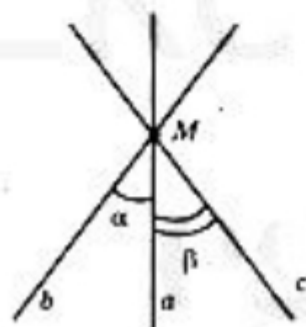
199.	№	Довжина відрізка, см					Відстань до прямої a від точки			
		AB	AC	BC	OA	OB	OC	A	B	C
	1	6	3	3	2	8	5	2	8	5
	2	3	1	2	3	6	4	3	6	4
	3	5	1	4	3	8	4	3	8	4

200. 1) $NA \perp DE$, $MB \perp FC$.

2) $NO \perp OE$, $NO \perp OF$, $OE \perp OM$, $OF \perp OM$.

3) $NA \perp OE$, $MB \perp EF$, $FC \perp MN$.

201.



1) Оскільки $\alpha = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$, $\beta = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$,

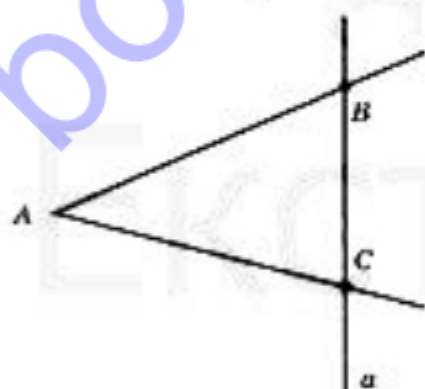
то $\alpha + \beta = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$. Отже, $b \perp c$.

2) Оскільки $\beta = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$,

$\alpha = \frac{5}{4}\beta = \frac{5 \cdot 40}{4} = 50^\circ$, то $\alpha + \beta = 50^\circ + 40^\circ = 90^\circ$.

Отже, $b \perp c$. 3) Оскільки $\alpha = 5\beta$ і $\alpha - \beta = 60^\circ$, то $5\beta - \beta = 60^\circ$, $4\beta = 60^\circ$, $\beta = 15^\circ$, $\alpha = 5 \times 15^\circ = 75^\circ$, $\alpha + \beta = 75^\circ + 15^\circ = 90^\circ$. Отже, $b \perp c$.

202.



Прямі AB і AC не можуть бути перпендикулярними до прямої a . Припустимо, що

пущення неправильне і прямі AB і AC не можуть бути перпендикулярними до прямої a .

203. 1)



$OP = PT$, $KP = 2$ см, $OT = 7$ см.

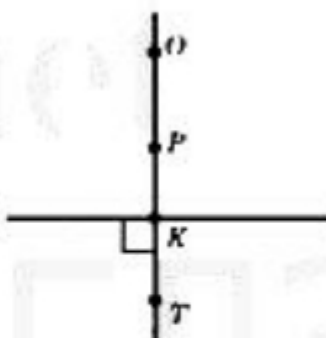
$OP = \frac{1}{2}OT = \frac{1}{2} \cdot 7 = 3,5$ (см),

$OK = OP - KP$.

$OK = 3,5$ см $- 2$ см $= 1,5$ см.

$TK = TP + PK = 3,5$ см $+ 2$ см $= 5,5$ см.

2)

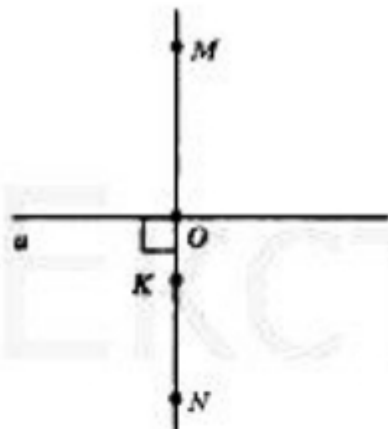


$OP = PT$, $KP = 2$ см, $OT = 7$ см,

$OP = \frac{1}{2}OT = \frac{1}{2} \cdot 7 = 3,5$ (см).

$OK = KP + OP = 2 + 3,5 = 5,5$ (см),

$TK = PT - KP = 3,5 - 2 = 1,5$ (см).



1) $OM = 6$ см,

$ON = 9$ см. $MN = OM + ON = 6 + 9 = 15$ (см)

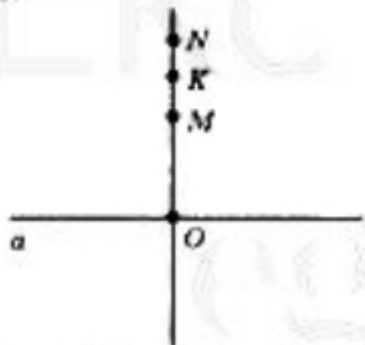
2) K — середина відрізка MN .

$$KN = KM = \frac{1}{2} MN = \frac{1}{2} \cdot 15 = 7,5 \text{ (см)},$$

$$OK = KM - OM = 7,5 - 6 = 1,5 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 1) 15 см; 2) 1,5 см.

II випадок.



1) $OM = 6$ см, $ON = 9$ см, $MN = ON - OM = 9 - 6 = 3$ (см).

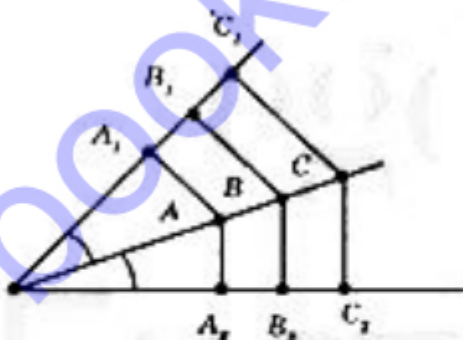
2) K — середина відрізка MN .

$$KN = KM = \frac{1}{2} MN = \frac{1}{2} \cdot 3 = 1,5 \text{ (см)},$$

$$OK = OM + KM = 6 + 1,5 = 7,5 \text{ (см)}.$$

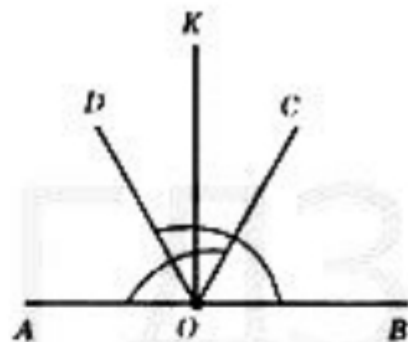
Відповідь: 1) 3 см; 2) 7,5 см.

205.



$AA_1 = AA_2$; $BB_1 = BB_2$; $CC_1 = CC_2$. Для кожної точки A, B, C , які лежать на бісектрисі, відстані до сторін кута рівні.

206.



Оскільки $\angle AOC = \angle BOD$ за умовою, OK — бісектриса кута COD , $\angle COK = \angle DOK$.

I випадок.

$$\begin{aligned} \angle KOB &= \angle DOK + \angle BOD = \frac{1}{2} \angle COD + \\ &+ \frac{1}{2} (\angle BOD + \angle AOC) = \frac{1}{2} (\angle COD + \angle BOD + \\ &+ \angle AOC) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ. \end{aligned}$$

Отже, $OK \perp AB$.

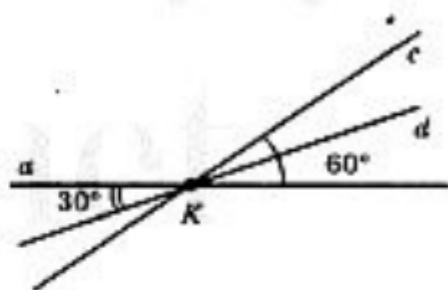
II випадок.

$$\begin{aligned} \angle KOB &= \angle DOB - \angle DOK = 180^\circ - \angle AOD - \\ &- \angle DOK = 180^\circ - \frac{1}{2} (\angle AOD + \angle BOC) - \\ &- \frac{1}{2} \angle DOC = 180^\circ - \frac{1}{2} (\angle AOD + \angle BOC + \\ &+ \angle DOC) = 180^\circ - \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ. \end{aligned}$$

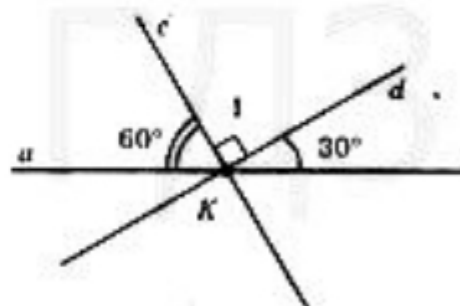
Отже, $OK \perp AB$.

207. Можливі два випадки розташування прямих c і d відносно прямої a .

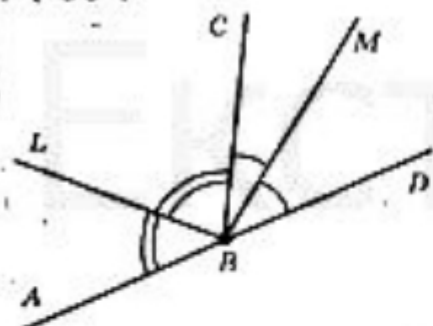
а)



б)



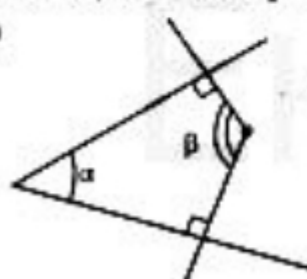
$= 2\angle ABC$, $\angle CDB = 2\angle CBM$. Оскільки за умовою задачі $BL \perp BM$, то $\angle LBC + \angle CBM = 90^\circ$.



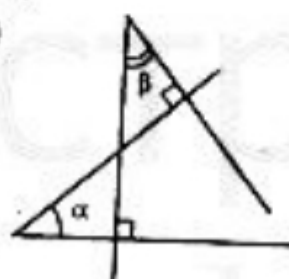
$\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD = 2\angle LBC + 2\angle CBM = 2(\angle LBC + \angle CBM) = 2 \times 90^\circ = 180^\circ$. Оскільки $\angle ABD$ — розгорнутий, то точки A, B, D лежать на одній прямій.

209. а) α — гострий кут;

1)

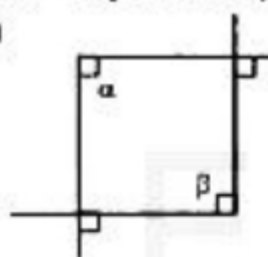


2)



б) α — прямий кут;

1)

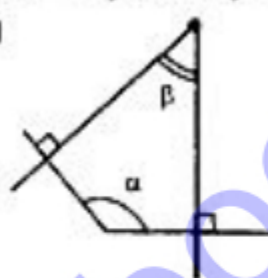


2)

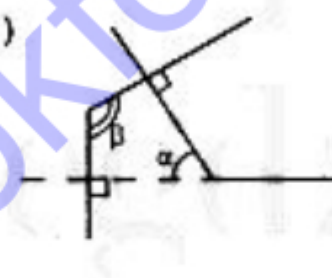


в) α — тупий кут.

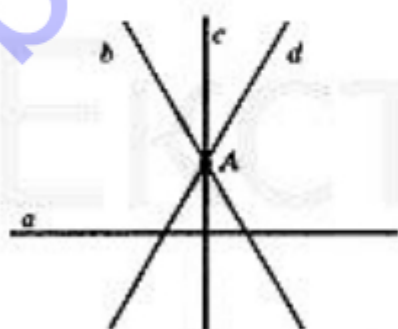
1)



2)



210.



Оскільки через точку A можна провести

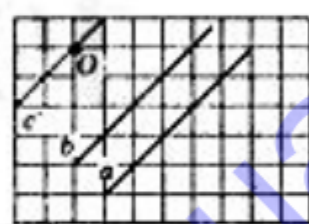
мої a , або одна перпендикулярна, а дві інші не перпендикулярні до прямої a).

§ 7. Паралельні прямі

212. 1) На мал. 134 прямі c і d перетинаються. 2) на мал. 135 прямі p і q паралельні $p \parallel q$.

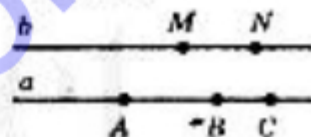
213. $\frac{b}{a} \parallel a$.

214.



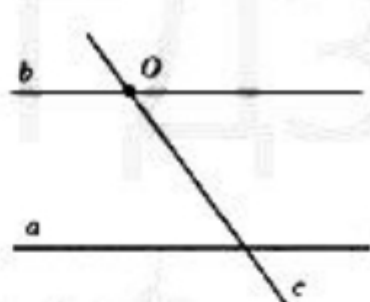
215. 1) $\angle 1$ і $\angle 2$ — внутрішні односторонні кути. 2) $\angle 1$ і $\angle 3$ — внутрішні різносторонні кути. 3) $\angle 3$ і $\angle 4$ — внутрішні односторонні кути. 4) $\angle 2$ і $\angle 4$ — внутрішні різносторонні кути.

216.



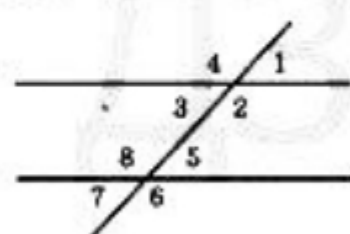
1) Відрізок AB паралельні промені: MN і NM . 2) Променю MN паралельні відрізки: AB, AC, BC .

217.



Пряму a не перетинає пряма b , пряму a перетинає пряма c . Через точку поза прямою можна провести лише одну пряму, паралельну даній.

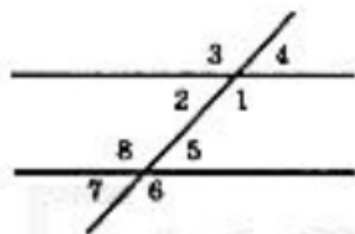
218. 1)



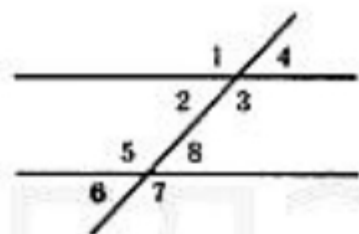
2)



3)



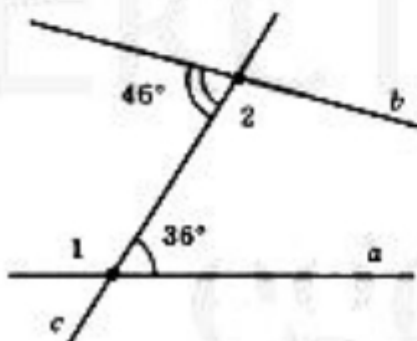
4)



219.

	Номери кутів при двох прямих і січній	
	Мал. 138	Мал. 139
Внутрішні односторонні	$\angle 2$ і $\angle 5$; $\angle 3$ і $\angle 8$	$\angle 1$ і $\angle 5$; $\angle 2$ і $\angle 6$
Внутрішні різносторонні	$\angle 2$ і $\angle 3$; $\angle 5$ і $\angle 8$	$\angle 1$ і $\angle 6$; $\angle 2$ і $\angle 5$
Відповідні	$\angle 4$ і $\angle 2$; $\angle 6$ і $\angle 8$; $\angle 3$ і $\angle 1$; $\angle 5$ і $\angle 7$	$\angle 8$ і $\angle 1$; $\angle 5$ і $\angle 4$; $\angle 7$ і $\angle 2$; $\angle 6$ і $\angle 3$
Зовнішні односторонні	$\angle 4$ і $\angle 7$; $\angle 6$ і $\angle 1$	$\angle 8$ і $\angle 4$; $\angle 7$ і $\angle 3$
Зовнішні різносторонні	$\angle 6$ і $\angle 7$; $\angle 4$ і $\angle 1$	$\angle 8$ і $\angle 3$; $\angle 7$ і $\angle 4$

220.

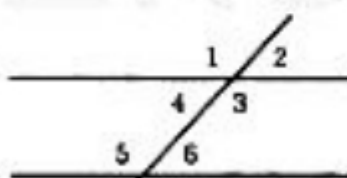


$\angle 1 = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$. $\angle 2 = 180^\circ - 46^\circ = 134^\circ$. Внутрішні односторонні кути: 46° і 144° ; 36° і 134° .



$\angle 2 = 104^\circ$ — як вертикальні кути;
 $\angle 1 = 180^\circ - \angle 2 = 180^\circ - 104^\circ = 76^\circ$ — як суміжні кути;
 $\angle 3 = 180^\circ - 114^\circ = 66^\circ$ — як суміжні кути. Внутрішні односторонні кути: 104° і 66° ; 76° і 114° .

221.



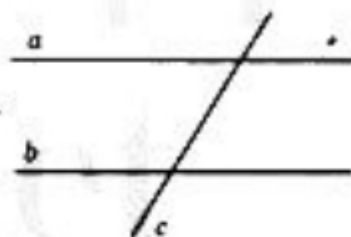
Отже, внутрішні односторонні кути дорівнюють: 50° і 135° ; 45° і 130° .

2) $\angle 2 = \angle 6 = 60^\circ$. Тоді $\angle 4 = \angle 2 = 60^\circ$; $\angle 3 = 180^\circ - \angle 4 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$; $\angle 5 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Отже, внутрішні односторонні кути дорівнюють: 60° і 120° ; 60° і 120° .

3) Якщо $\angle 3 = \angle 5 = 110^\circ$, то $\angle 4 = \angle 6 = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$. Отже, внутрішні односторонні кути дорівнюють: 70° і 110° ; 70° і 110° .

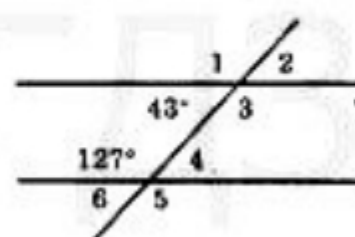
222. 1) $AB \parallel DC$; $AD \parallel BC$. 2) $DN \parallel CM$; $DN \parallel BG$; $BK \parallel DO$. 3) $AD \parallel CG$; $DC \parallel BK$.

223.



Прямі a і c перетинаються згідно з наслідком аксіоми паралельних прямих.

224. 1)

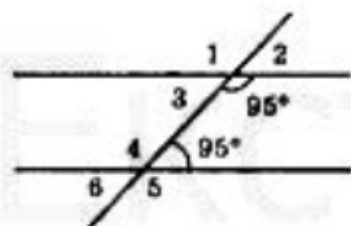


$\angle 2 = 43^\circ$, $\angle 1 = \angle 3 = 180^\circ - 43^\circ = 137^\circ$.
 $\angle 5 = 127^\circ$, $\angle 4 = \angle 6 = 180^\circ - 127^\circ = 53^\circ$.

$$\angle 1 = 165^\circ, \angle 2 = \angle 3 = 180^\circ - 165^\circ = 15^\circ;$$

$$\angle 6 = 15^\circ, \angle 4 = \angle 5 = 180^\circ - 15^\circ = 165^\circ.$$

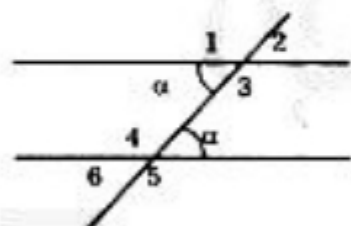
3)



$$\angle 1 = 95^\circ, \angle 2 = \angle 3 = 180^\circ - 95^\circ = 85^\circ;$$

$$\angle 6 = 95^\circ, \angle 4 = \angle 5 = 180^\circ - 95^\circ = 85^\circ.$$

225.



Якщо внутрішні різносторонні кути дорівнюють α , то $\angle 2 = \angle 6 = \alpha$, $\angle 1 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 5 = 180^\circ - \alpha$.

1) Якщо $\alpha = 30^\circ$, то $\angle 2 = \angle 6 = 30^\circ$, $\angle 1 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 5 = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

2) Якщо $\alpha = 150^\circ$, то $\angle 2 = \angle 6 = 150^\circ$, $\angle 1 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 5 = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.

3) Якщо $\alpha = 80^\circ 30'$, то $\angle 2 = \angle 6 = 80^\circ 30'$, $\angle 1 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 5 = 180^\circ - 80^\circ 30' = 99^\circ 30'$.

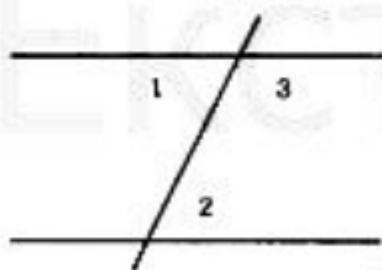
4) Якщо $\alpha = 99^\circ 30'$, то $\angle 2 = \angle 6 = 99^\circ 30'$, $\angle 1 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 5 = 180^\circ - 99^\circ 30' = 80^\circ 30'$.

226.



Нехай $\angle 1 = \angle 2$. Доведемо, що $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$. Дійсно, $\angle 3 = 180^\circ - \angle 1$, тоді $\angle 2 + \angle 3 = \angle 2 + 180^\circ - \angle 1 = 180^\circ$. (Оскільки $\angle 2 = \angle 1$).

227.



Нехай $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$. Доведемо,

228.

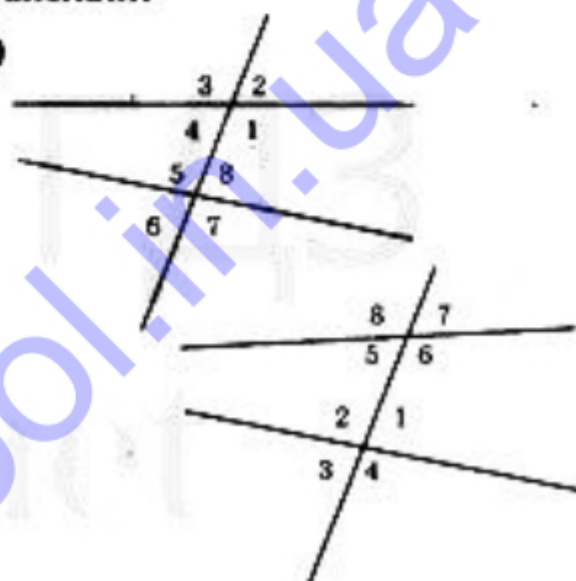
b _____

c _____

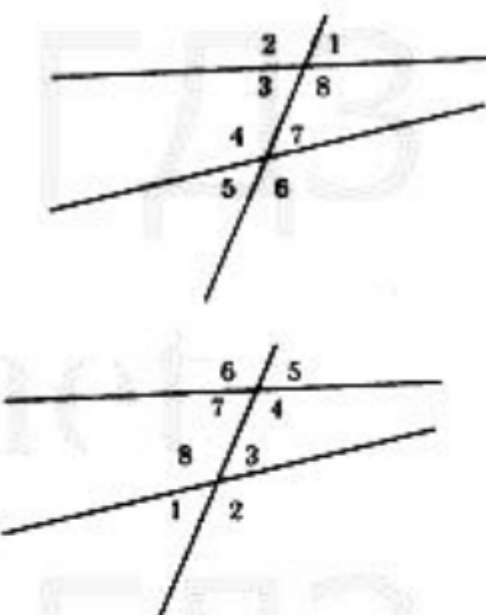
a _____

Нехай $a \parallel c, b \parallel c$. Доведемо, що $a \parallel b$. Припустимо, що a і b не паралельні, тобто вони перетинаються в деякій точці A . Отже, через A проходить дві прямі a і b , які паралельні прямій c , що суперечить аксіомі паралельних прямих. Отже, наше припущення неправильне, прямі a і b паралельні.

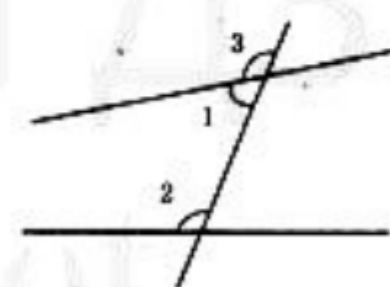
229. 1)



2)

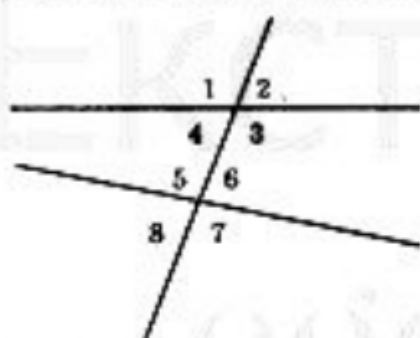


230.



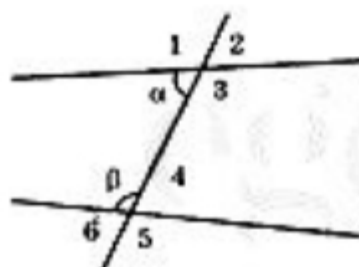
мо: $\angle 1 = 180^\circ - \angle 3 = 180^\circ - \angle 2$. Тоді $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ - \angle 2 + \angle 2 = 180^\circ$, що суперечить умові задачі. Отже, припущення неправильне, а правильне, що $\angle 2 \neq \angle 3$.

231.



Нехай $\angle 1 : \angle 5 = 2 : 1$, $\angle 4 + \angle 5 = 135^\circ$.
Нехай $\angle 5 = x^\circ$, $\angle 1 = 2x^\circ$, $\angle 4 = 180^\circ - 2x^\circ$,
тоді $180^\circ - 2x + x = 135^\circ$; $x = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.
Отже, $\angle 5 = \angle 7 = 45^\circ$, $\angle 6 = \angle 8 = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.
 $\angle 3 = \angle 1 = 45^\circ \times 2 = 90^\circ$, $\angle 2 = \angle 4 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.
Відповідь: $90^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 45^\circ, 135^\circ, 45^\circ, 135^\circ$.

232. 1)



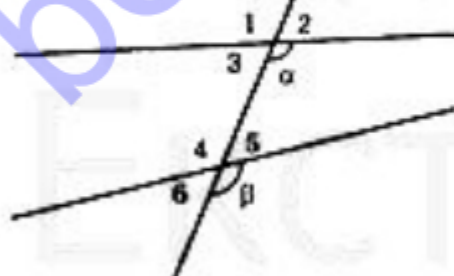
$\angle 2 = \alpha$, $\angle 1 = \angle 3 = 180^\circ - \alpha$, $\angle 5 = \beta$,
 $\angle 4 = \angle 6 = 180^\circ - \beta$.

2)



$\angle 1 = \alpha$, $\angle 2 = \angle 3 = 180^\circ - \alpha$, $\angle 5 = \beta$,
 $\angle 4 = \angle 6 = 180^\circ - \beta$.

3)



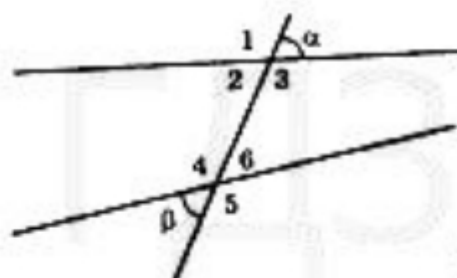
$\angle 1 = \alpha$, $\angle 2 = \angle 3 = 180^\circ - \alpha$, $\angle 4 = \beta$,
 $\angle 5 = \angle 6 = 180^\circ - \beta$.

4)

$\angle 1 = \alpha$

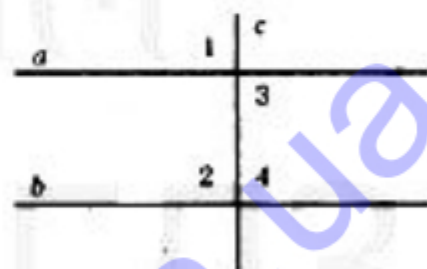
$\angle 2 = \alpha$, $\angle 1 = \angle 3 = 180^\circ - \alpha$, $\angle 4 = \beta$,
 $\angle 5 = \angle 6 = 180^\circ - \beta$.

5)



$\angle 2 = \alpha$, $\angle 1 = \angle 3 = 180^\circ - \alpha$, $\angle 6 = \beta$,
 $\angle 4 = \angle 5 = 180^\circ - \beta$.

233.



$\angle 1 = \frac{\angle 3 + \angle 4}{2}$, $\angle 2 = \frac{\angle 3 + \angle 4}{2}$. Доведемо,

що $a \perp c$, $b \perp c$. Із умови $\angle 1 = \frac{\angle 3 + \angle 4}{2}$

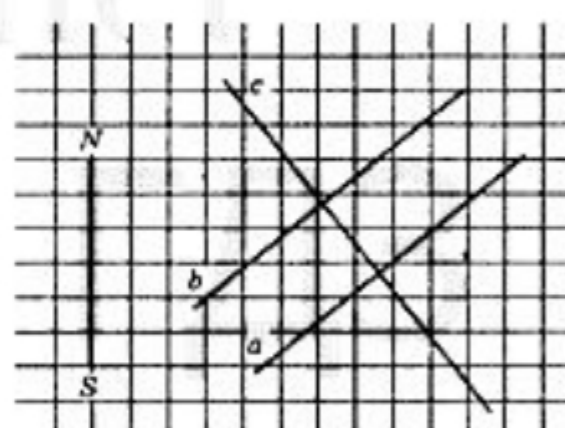
маємо: $2\angle 1 = \angle 3 + \angle 4$. Враховуючи, що $\angle 1 = \angle 3$, маємо $2\angle 3 = \angle 3 + \angle 4$, звідси $\angle 3 = \angle 4$. Із умови $\angle 2 = \frac{\angle 3 + \angle 4}{2}$ маємо

$2\angle 2 = \angle 3 + \angle 4$. Оскільки $\angle 3 = \angle 4$, то маємо $2\angle 2 = \angle 4 + \angle 4$, $2\angle 2 = 2\angle 4$, $\angle 2 = \angle 4$.

Враховуючи, що $\angle 2$ і $\angle 4$ суміжні і рівні, маємо $\angle 2 = \angle 4 = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$. Отже $b \perp c$.

Оскільки $\angle 3 = \angle 4$ і $\angle 4 = 90^\circ$, то $\angle 3 = 90^\circ$.
Отже, $a \perp c$.

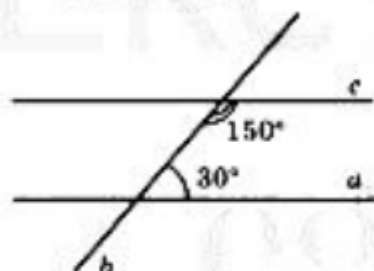
234.



Вулиця b , паралельна вулиці a , прохо-

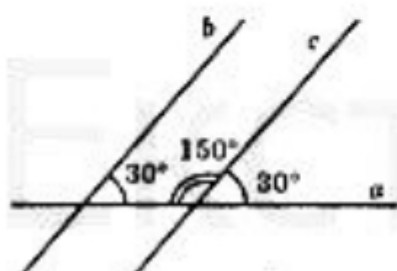
- 235.** 1) Прямі AP і BO паралельні, оскільки сума внутрішніх односторонніх кутів $135^\circ + 45^\circ = 180^\circ$. Отже, $AP \parallel BO$.
2) Прямі a і b не паралельні, оскільки сума внутрішніх односторонніх кутів $45^\circ + 136^\circ = 181^\circ \neq 180^\circ$.

236. 1)



$a \parallel c$, b — січна;

2)



$b \parallel c$, a — січна.

- 237.** 1) Прямі не паралельні, оскільки $25^\circ + 125^\circ = 150^\circ \neq 180^\circ$.
2) Прямі паралельні, оскільки $38^\circ + 142^\circ = 180^\circ$.
3) Прямі не паралельні, оскільки $61^\circ + 117^\circ = 178^\circ \neq 180^\circ$.
4) Прямі паралельні, оскільки $56^\circ + 124^\circ = 180^\circ$.

238. Проводимо довільну пряму a , прикладаємо косинець до прямої, а лінійку до косинця. Утримуючи лінійку в тому самому положенні, переміщуємо косинець вздовж лінійки до точки M і проводимо другу пряму b . Прямі a і b паралельні, бо відповідні кути рівні.

- 239.** 1) Прямі не паралельні, оскільки сума внутрішніх односторонніх кутів $18^\circ + 118^\circ = 136^\circ \neq 180^\circ$.
2) Прямі не паралельні, оскільки сума внутрішніх односторонніх кутів $130^\circ + 102^\circ = 232^\circ \neq 180^\circ$.
3) Прямі не паралельні, оскільки сума внутрішніх односторонніх кутів $37^\circ +$

- 241.** 1) Прямі не паралельні, оскільки внутрішні різносторонні кути не рівні $45^\circ \neq 55^\circ$.

- 2) Прямі паралельні, оскільки внутрішні різносторонні кути рівні $168^\circ = 168^\circ$.
3) Прямі паралельні, оскільки внутрішні різносторонні кути рівні $91^\circ = 91^\circ$.

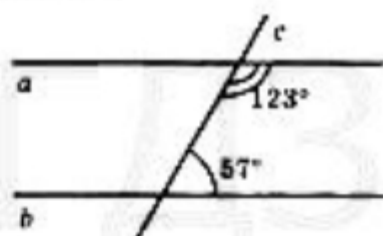
242. Оскільки внутрішні кути є відповідними і вони рівні, то згідно наслідку 2 прямі a і b паралельні. Отже, $a \parallel b$.

- 243.** 1) Прямі паралельні, оскільки відповідні кути рівні $117^\circ = 117^\circ$.
2) Прямі не паралельні, оскільки відповідні кути не рівні $63^\circ \neq 163^\circ$.
3) Прямі не паралельні, оскільки відповідні кути не рівні $48^\circ \neq 84^\circ$.

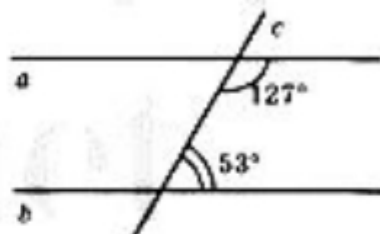
244. Кути 71° і 112° — внутрішні односторонні кути при прямих c і d і січній a . Оскільки їх сума $71^\circ + 112^\circ = 183^\circ \neq 180^\circ$, то прямі c і d не паралельні.

Кути 112° і 68° — внутрішні односторонні кути при прямих a і b і січній d . Оскільки їх сума $112^\circ + 68^\circ = 180^\circ$, то прямі a і b паралельні.

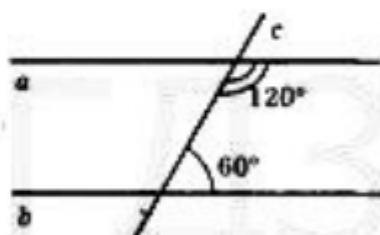
245. 1)



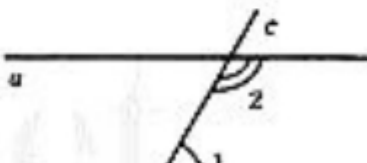
2)



3)

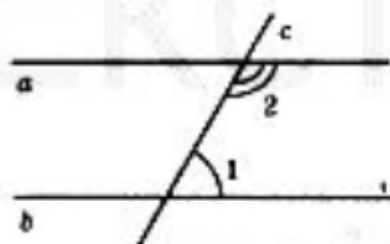


246.



$\angle 1 + 2\angle 1 = 180^\circ$, $3\angle 1 = 180^\circ$, $\angle 1 = 60^\circ$; $\angle 2 = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$. Отже, прямі a і b паралельні, якщо різниця внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 60° .
1) ні; 2) ні; 3) так; 4) ні.

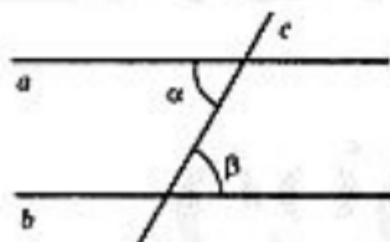
247.



Нехай $\angle 2 = 3 \times \angle 1$. Прямі a і b паралельні, якщо $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, тоді маємо $\angle 1 + 3 \times \angle 1 = 180^\circ$, $4\angle 1 = 180^\circ$, $\angle 1 = 45^\circ$, а $\angle 2 = 135^\circ$. Отже, прямі a і b паралельні, якщо різниця внутрішніх односторонніх кутів дорівнює $135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$.

1) ні; 2) ні; 3) ні; 4) так.

248.



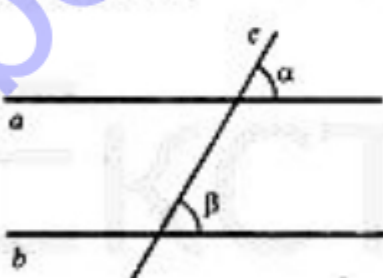
1) Оскільки $\alpha - \beta > 0$, то $\alpha > \beta$. Оскільки внутрішні різносторонні кути не рівні, то прямі не паралельні.

2) Оскільки $\beta - \alpha = 0$, то $\beta = \alpha$. Оскільки внутрішні різносторонні кути рівні, то прямі паралельні.

3) Прямі можуть бути паралельними у випадку $\alpha - \beta = 90^\circ$, у всіх інших випадках прямі не паралельні.

4) Прямі можуть бути паралельні у випадку $\alpha - \beta = 45^\circ$, у всіх інших випадках прямі не паралельні.

249.



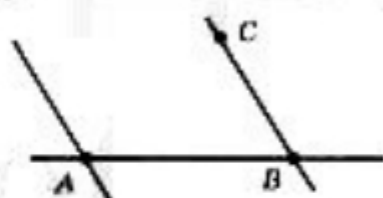
1) Оскільки $\alpha : \beta = 1 : 1$, то $\alpha = \beta$. Оскільки відповідні кути рівні, то прямі пара-

3) Оскільки $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{2}$, то $2\alpha = 3\beta$, $\alpha \neq \beta$.

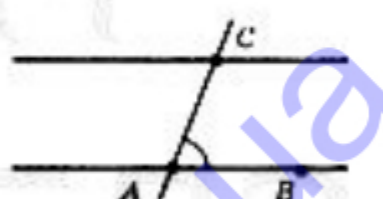
Оскільки відповідні кути не рівні, то прямі не паралельні.

4) Оскільки $\alpha - \beta = 90^\circ$, то $\alpha \neq \beta$. Оскільки відповідні кути не рівні, то прямі не паралельні.

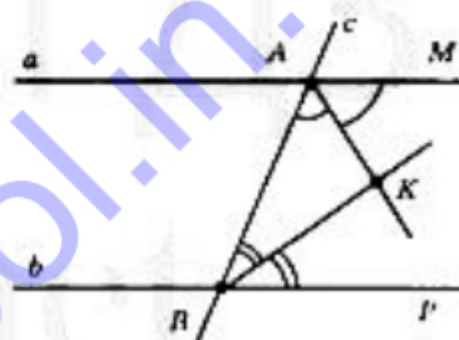
250. 1)



2)



251.



Нехай AK — бісектриса кута BAM , $\angle BAM = 2\angle BAK$; BK — бісектриса кута ABP , $\angle ABP = 2\angle ABK$. За умовою $\angle BAK + \angle ABK = 90^\circ$. Доведемо, що $a \parallel b$.

Знайдемо суму внутрішніх односторонніх кутів: $\angle BAM + \angle ABP = 2\angle BAK + 2\angle ABK = 2(\angle BAK + \angle ABK) = 2 \times 90^\circ = 180^\circ$. Оскільки сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180° , то прямі a і b паралельні.

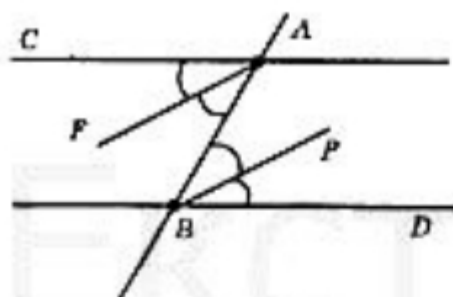
252. Нехай α і β — внутрішні односторонні кути і $\alpha < \beta$.

1) За умовою $\alpha + \frac{\beta}{2} = 100^\circ$; $2\alpha + \beta = 200^\circ$.

Для того, щоб прямі були паралельними, треба щоб $\alpha + \beta = 180^\circ$, тоді $2\alpha + \beta = \alpha + \alpha + \beta = \alpha + 180^\circ$. Отже, $\alpha + 180^\circ = 200^\circ$, звідси $\alpha = 200^\circ - 180^\circ = 20^\circ$.

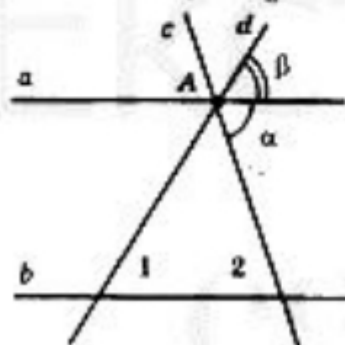
2) За умовою $\alpha + \frac{\beta}{2} = 135^\circ$; $2\alpha + \beta = 270^\circ$.

253.



Нехай $\angle CAB = \angle ABD$, AF — бісектриса кута CAB , $\angle FAB = \frac{\angle CAB}{2}$; BP — бісектриса кута DBA , $\angle ABP = \frac{\angle DBA}{2}$, тоді $\angle FAB = \angle ABP$ — як половини рівних кутів. Розглянемо прямі FA і BP та січну AB : $\angle FAB = \angle ABP$ — внутрішні різносторонні кути і рівні. Отже, $FA \parallel BP$.

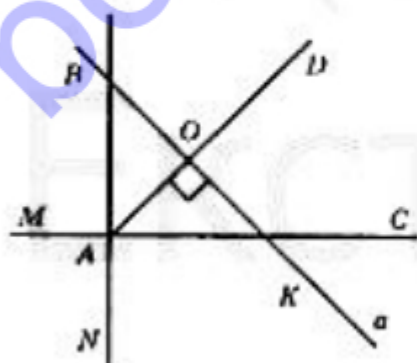
254.



1) $\angle 1 = \frac{\alpha}{3}$ і $\beta : \alpha = 2 : 1$, тоді $\alpha = 3\angle 1$ і $\beta = 2\alpha = 2 \times 3\angle 1 = 6\angle 1$. Оскільки $\angle 1$ і β є відповідними кутами при прямих a і b і січній d і $\angle 1 \neq \beta$, то прямі a і b не паралельні.

2) $\angle 2 = \frac{\beta}{2}$ і $\frac{\beta}{\alpha} = 2$, тоді $\beta = 2\angle 2$ і $\beta = 2\alpha$, і отже, $\angle 2 = \alpha$. Оскільки $\angle 2$ і α — внутрішні різносторонні кути при прямих a і b і січній c і вони рівні, то $a \parallel b$.

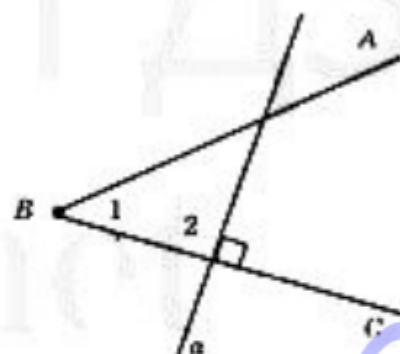
255.



Розглянемо прямі a і MC та січну AD : $\angle KOA$ і $\angle CAO$ — внутрішні односторонні

кути і $\angle KOA + \angle OAN = 90^\circ + 135^\circ = 225^\circ \neq 180^\circ$. Отже, прямі a і BN не паралельні. Отже, пряма a не може бути паралельною жодній зі сторін кута, вертикальною з даним.

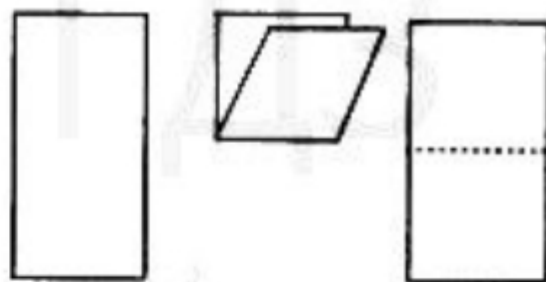
256.



Нехай $\angle ABC$ — гострий, $a \perp BC$. Доведемо, що пряма a перетинає сторону AB . Припустимо, що пряма a не перетинає AB , тобто $a \parallel AB$. Розглянемо прямі a і AB і січну BC . $\angle 2$ і $\angle 1$ є внутрішніми односторонніми кутами і $\angle 2 + \angle 1 = 90^\circ + \angle 1 \neq 180^\circ$ (оскільки $\angle 1 < 90^\circ$). Отже, прямі a і AB не паралельні, що суперечить припущенню. Отже, пряма a перетинає і другу сторону гострого кута.

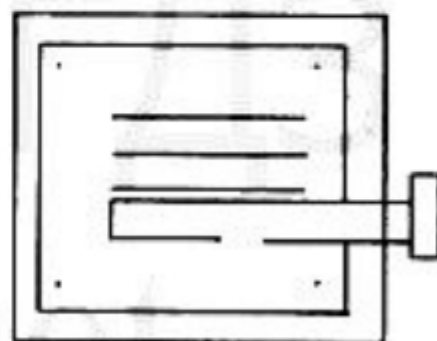
Застосуйте на практиці

257.



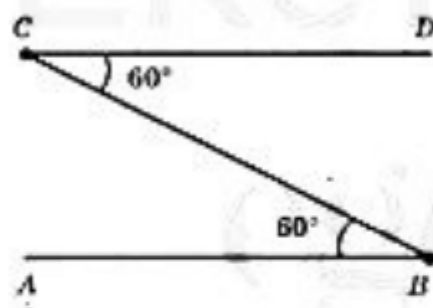
Щоб лінія згину була паралельна краю аркуша, треба аркуш зігнути так, щоб верхній край аркуша співпав з нижнім краєм аркуша.

258.



паралельні прямі. Накреслені прямі будуть паралельними згідно з ознакою паралельності прямих за відповідними кутами. Побудова паралельних прямих за допомогою малки проводиться аналогічно.

259.



$AB \parallel CD$, оскільки $\angle DCB = \angle ABC$ і кути DCB і ABC — внутрішні різносторонні кути при прямих AB і CD і січній CB .

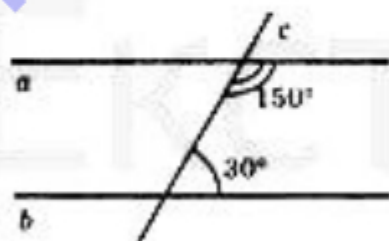
§ 9. Властивості паралельних прямих

260. На мал. 167 внутрішні односторонні кути позначено правильно, оскільки $139^\circ + 41^\circ = 180^\circ$ і $a \parallel b$. На мал. 168 внутрішні односторонні кути позначено неправильно, оскільки $135^\circ + 35^\circ \neq 180^\circ$, а $a \parallel b$.

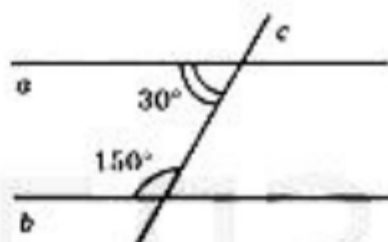
261. На мал. 169 внутрішні різносторонні кути позначено неправильно, оскільки $24^\circ \neq 41^\circ$, а $n \parallel m$. На мал. 170 внутрішні різносторонні кути позначено правильно, оскільки $135^\circ = 135^\circ$ і $n \parallel m$.

262. На мал. 171 відповідні кути позначено правильно, оскільки $65^\circ = 65^\circ$ і $x \parallel y$. На мал. 172 відповідні кути позначено неправильно, оскільки $95^\circ \neq 100^\circ$, а $y \parallel x$.

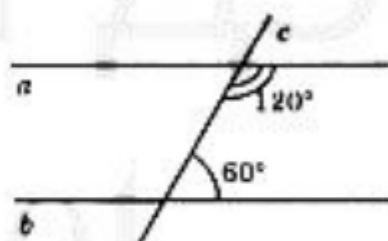
263. 1)



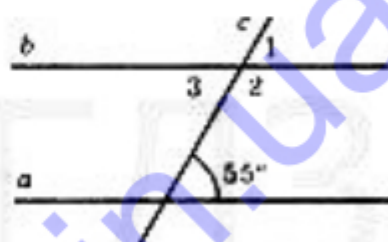
3)



4)



264.



Оскільки $a \parallel b$, то $\angle 1 = 55^\circ$ (як відповідні кути при паралельних прямих). $\angle 3 = 55^\circ$ (як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих). $\angle 2 = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$ (як внутрішні односторонні кути при паралельних прямих).

265. 1) $180^\circ - 137^\circ = 43^\circ$;

2) $180^\circ - 54^\circ = 126^\circ$;

3) $180^\circ - 162^\circ = 18^\circ$;

4) $180^\circ - 23^\circ = 157^\circ$.

Відповідь: 1) 43° ; 2) 126° ; 3) 18° ; 4) 157° .

266. Мал. 174. $\alpha + \alpha + 20^\circ = 180^\circ$; $2\alpha + 20^\circ = 180^\circ$; $2\alpha = 160^\circ$; $\alpha = 80^\circ$. Отже, внутрішні односторонні кути дорівнюють 80° і $80^\circ + 20^\circ = 100^\circ$.

Мал. 175. $\beta + 3\beta = 180^\circ$; $4\beta = 180^\circ$; $\beta = 45^\circ$. Отже, внутрішні односторонні кути дорівнюють 45° і $45^\circ \times 3 = 135^\circ$.

Відповідь: 1) 80° і 100° ; 2) 45° і 135° .

267. 1) Оскільки сума внутрішніх односторонніх кутів при паралельних прямих і січній дорівнює 180° , то гострий кут дорівнює $(180^\circ - 30^\circ) : 2 = 75^\circ$, а тупий $180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$.

3) Оскільки сума внутрішніх односторонніх кутів при паралельних прямих і січній дорівнює 180° , то гострий кут дорівнює $180^\circ : 3 = 60^\circ$, а тупий — $180^\circ : 3 \times 2 = 120^\circ$.

Відповідь: 1) 75° і 105° ; 2) 30° і 150° ; 3) 60° і 120° .

268. Оскільки внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих і січній рівні, то, щоб знайти ці кути за їх сумою, треба суму розділити пополам.

1) $107^\circ : 2 = 53^\circ 30'$;

2) $94^\circ : 2 = 47^\circ$;

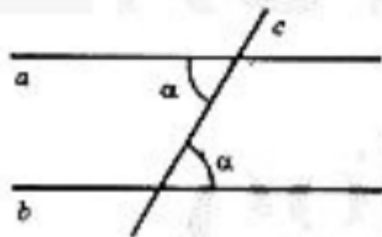
3) $132^\circ : 2 = 66^\circ$;

4) $43^\circ : 2 = 21^\circ 30'$.

Відповідь: 1) $53^\circ 30'$; 2) 47° ; 3) 66° ;

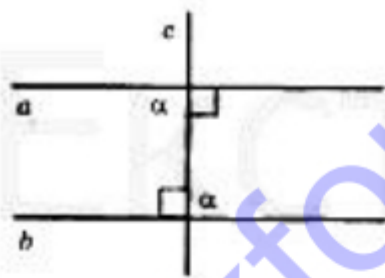
4) $21^\circ 30'$.

269. 1)



Так, $\alpha < 90^\circ$

2)



Так, $\alpha = 90^\circ$

3)



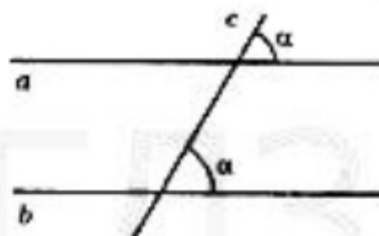
Так $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

270. Оскільки відповідні кути при паралельних прямих і січній рівні, то щоб знайти відповідні кути за їх сумою, треба суму розділити пополам.

1) $137^\circ : 2 = 68^\circ 30'$;

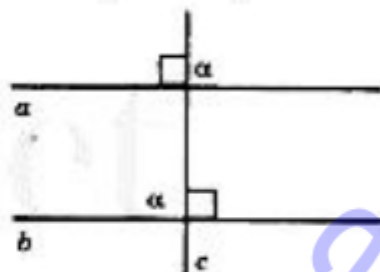
2) $54^\circ : 2 = 27^\circ$;

271. 1)



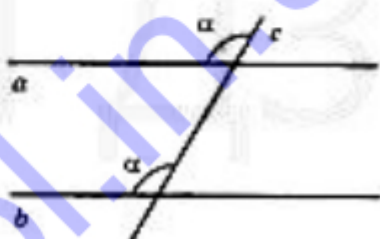
Так, $\alpha < 90^\circ$

2)



Так, $\alpha = 90^\circ$

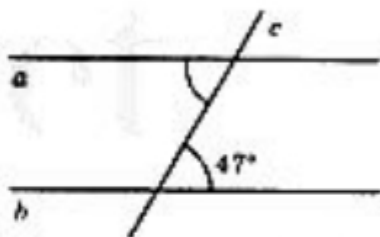
3)



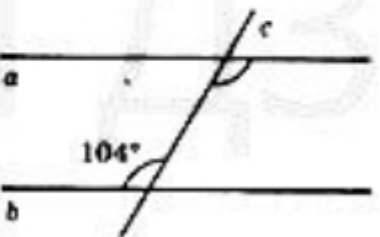
Так, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

272. Ні, неправильно. Сума внутрішніх односторонніх кутів має бути 180° . Тоді кут, утворений прямими a та c є внутрішнім одностороннім з кутом в 60° , утвореним прямими a та d, має дорівнювати 120° . Але він як вертикальний із зовнішнім кутом у 160° , який утворили прямі a та c, має дорівнювати 160° . $120^\circ \neq 160^\circ$.

273. 1)



2)



3)

/c

274. 1) Гострий кут дорівнює $(180^\circ - 30^\circ) : 2 = 75^\circ$, а тупий кут дорівнює $180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$.

2) Гострий кут дорівнює $(180^\circ - 105^\circ) : 2 = 37^\circ 30'$, а тупий кут дорівнює $180^\circ - 37^\circ 30' = 142^\circ 30'$.

3) Гострий кут дорівнює $(180^\circ - 67^\circ) : 2 = 56^\circ 30'$, а тупий кут дорівнює $180^\circ - 56^\circ 30' = 123^\circ 30'$.

4) Оскільки внутрішні односторонні кути рівні, то вони прямі: $180^\circ : 2 = 90^\circ$.

Відповідь: 1) 75° і 105° ; 2) $37^\circ 30'$ і $142^\circ 30'$; 3) $56^\circ 30'$ і $123^\circ 30'$; 4) 90° і 90° .

275. Сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180° . $\alpha + \beta = 180^\circ$.

1) $\frac{\alpha}{\beta} = 9$; $\alpha = 9\beta$; $9\beta + \beta = 180^\circ$; $10\beta = 180^\circ$;
 $\beta = 18^\circ$; $\alpha = 9 \times 18^\circ = 162^\circ$.

2) $\frac{\alpha}{\beta} = 11$; $\alpha = 11\beta$; $11\beta + \beta = 180^\circ$;
 $12\beta = 180^\circ$; $\beta = 15^\circ$; $\alpha = 15^\circ \times 11 = 165^\circ$.

3) $\frac{\alpha}{\beta} = 1$; $\alpha = \beta$; $\alpha + \alpha = 180^\circ$; $2\alpha = 180^\circ$;
 $\alpha = 90^\circ$; $\beta = 90^\circ$.

4) $\frac{\alpha}{\beta} = 17$; $\alpha = 17\beta$; $17\beta + \beta = 180^\circ$;
 $18\beta = 180^\circ$; $\beta = 10^\circ$; $\alpha = 170^\circ$.

Відповідь: 1) 162° і 18° ; 2) 15° і 165° ; 3) 90° і 90° ; 4) 170° і 10° .

276. Аналогічно завданню 275.

277. Нехай α і β — внутрішні односторонні кути, сума яких дорівнює 180° .

1) $\alpha = \frac{1}{3}\beta$, $\frac{1}{3}\beta + \beta = 180^\circ$,

$\beta = 180^\circ \cdot \frac{3}{4} = 135^\circ$, $\alpha = 45^\circ$;

2) $\alpha = \frac{2}{3}\beta$, $\frac{2}{3}\beta + \beta = 180^\circ$,

$\beta = 180^\circ \cdot \frac{2}{5} = 72^\circ$, $\alpha = 108^\circ$;

4) $\alpha = \frac{7}{8}\beta$, $\frac{7}{8}\beta + \beta = 180^\circ$,

$\beta = 180^\circ \cdot \frac{8}{15} = 96^\circ$, $\alpha = 84^\circ$.

Відповідь: 1) 135° і 45° ; 2) 72° і 108° ; 3) 100° і 80° ; 4) 96° і 84° .

278. Сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180° . Знайдемо ці кути, якщо відомо відношення їх градусних мір.

1) Нехай один з кутів становить α° , тоді другий — $0,2\alpha^\circ$. Складемо рівняння: $\alpha + 0,2\alpha = 180$; $1,2\alpha = 180$; $\alpha = 150^\circ$;
 $0,2\alpha = 30^\circ$.

2) Нехай один з кутів становить α° , тоді другий — $0,6\alpha^\circ$. Складемо рівняння: $\alpha + 0,6\alpha = 180$; $1,6\alpha = 180$; $\alpha = 112^\circ 30'$;
 $0,6\alpha = 67^\circ 30'$.

3) Нехай один з кутів становить α° , тоді другий — $0,8\alpha^\circ$. Складемо рівняння: $\alpha + 0,8\alpha = 180$; $1,8\alpha = 180$; $\alpha = 100^\circ$;
 $0,8\alpha = 80^\circ$.

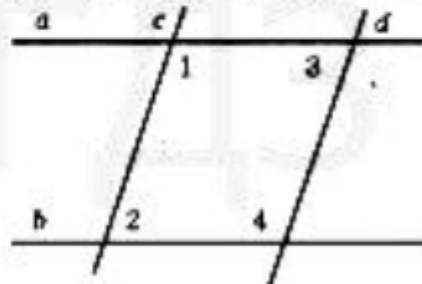
4) Нехай один з кутів становить α° , тоді другий — $0,25\alpha^\circ$. Складемо рівняння: $\alpha + 0,25\alpha = 180$; $1,25\alpha = 180$; $\alpha = 144^\circ$;
 $0,25\alpha = 36^\circ$.

Відповідь: 1) 150° і 30° ; 2) $112^\circ 30'$ і $67^\circ 30'$; 3) 100° і 80° ; 4) 144° і 36° .

279. Оскільки $AB \parallel CD$, то $\alpha = 36^\circ$ (бо кути α і 36° — внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих AB і CD і січній DB), $\gamma = 72^\circ$ (бо кут γ і 72° — внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих AB і CD і січній DA). Тоді $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$.

Відповідь: $\alpha = 36^\circ$, $\beta = 72^\circ$, $\gamma = 72^\circ$.

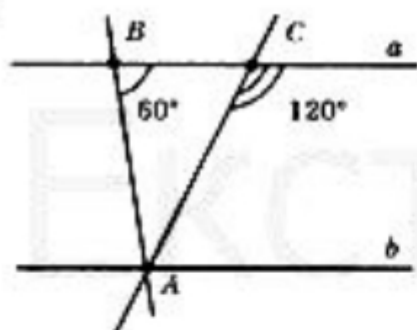
280.



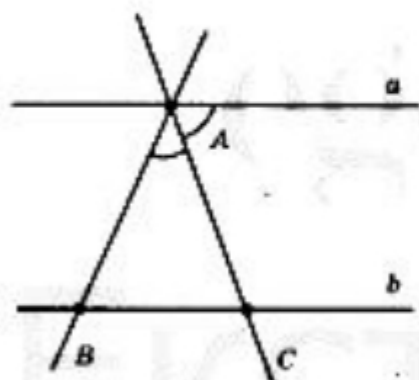
Оскільки $a \parallel b$, то $\angle 1$ і $\angle 2$ — внутрішні

Отже, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360^\circ$.

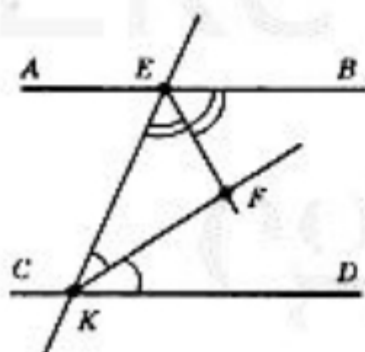
281. 1)



2)



282.



Нехай $AB \parallel CD$, тоді $\angle BEK + \angle DKE = 180^\circ$.
 EF — бісектриса $\angle BEK$, $\angle BEF = \angle KEF$.
 KE — бісектриса кута DKE , $\angle DKF = \angle FCE$.
 $\angle FKE + \angle KEF = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

Розглянемо дві прямі EF і KF та січну EK , $\angle FKE$ і $\angle KEF$ — внутрішні односторонні кути. Оскільки $\angle FKE + \angle KEF = 90^\circ$, то прямі EF і KF перетинаються.

283. 1) Оскільки $\frac{\alpha}{\beta} < 1$, $\alpha < \beta$, то α — гострий кут.

2) Оскільки $\frac{\alpha}{\beta} > 1$, $\alpha > \beta$, то β — гострий кут.

3) Оскільки $\frac{\beta}{\alpha} < 1$, $\beta < \alpha$, то β — гострий кут.

4) Оскільки $\frac{\beta}{\alpha} > 1$, $\beta > \alpha$, то α — гострий

сумою цих кутів та їх різницю: $\alpha + \beta - (\alpha - \beta) = \alpha + \beta - \alpha + \beta = 2\beta$. Отже, різниця між сумою і різницею цих кутів дорівнює подвоєному одному куту.

2) Якщо різниця дорівнює 20° , то один із кутів дорівнює $20^\circ : 2 = 10^\circ$, другий $180^\circ - 10^\circ = 170^\circ$.

2) Якщо різниця дорівнює 105° , то один із кутів дорівнює $105^\circ : 2 = 52^\circ 30'$, другий $180^\circ - 52^\circ 30' = 127^\circ 30'$.

3) Якщо різниця дорівнює 49° , то один із кутів дорівнює $49^\circ : 2 = 24^\circ 30'$, другий $180^\circ - 24^\circ 30' = 155^\circ 30'$.

4) Якщо різниця дорівнює 123° , то один із кутів дорівнює $123^\circ : 2 = 61^\circ 30'$, другий $180^\circ - 61^\circ 30' = 118^\circ 30'$.

Відповідь: 1) 10° і 170° ; 2) $52^\circ 30'$ і $127^\circ 30'$; 3) $24^\circ 30'$ і $155^\circ 30'$; 4) $61^\circ 30'$ і $118^\circ 30'$.

285. Нехай α і β — внутрішні односторонні кути, тоді різниця цих кутів дорівнює $\alpha - \beta$, а сума $\alpha + \beta = 180^\circ$.

1) Оскільки $\frac{\alpha - \beta}{180^\circ} = \frac{2}{3}$, то $\alpha - \beta = 120^\circ$,
 $\alpha - \beta + 120^\circ$, тоді $\beta + \beta + 120^\circ = 180^\circ$, $2\beta = 60^\circ$,
 $\beta = 30^\circ$, тоді $\alpha = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$. Отже, шукані кути 30° і 150° .

2) Оскільки $\frac{\alpha - \beta}{180^\circ} = \frac{3}{4}$, то $\alpha - \beta = 135^\circ$,
 $\alpha - \beta + 135^\circ$, тоді $\beta + \beta + 135^\circ = 180^\circ$,
 $2\beta + 135^\circ = 180^\circ$, $2\beta = 45^\circ$, $\beta = 22^\circ 30'$, тоді
 $\alpha = 180^\circ - 22^\circ 30' = 157^\circ 30'$. Отже, шукані кути дорівнюють $22^\circ 30'$ і $157^\circ 30'$.

3) Оскільки $\frac{\alpha - \beta}{180^\circ} = \frac{4}{5}$, то $\alpha - \beta = 144^\circ$,
 $\alpha - \beta + 144^\circ$, тоді $\beta + \beta + 144^\circ = 180^\circ$,
 $2\beta = 180^\circ - 144^\circ$, $2\beta = 36^\circ$, $\beta = 36^\circ : 2 = 18^\circ$,
тоді $\alpha = 180^\circ - 18^\circ = 162^\circ$. Отже, шукані кути дорівнюють 18° і 162° .

4) 3) Оскільки $\frac{\alpha - \beta}{180^\circ} = \frac{5}{6}$, то $\alpha - \beta = 150^\circ$,
 $\alpha - \beta + 150^\circ$, тоді $\beta + \beta + 150^\circ = 180^\circ$,
 $2\beta = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$, $\beta = 15^\circ$, тоді

286. 1) Нехай α і β — шукані внутрішні односторонні кути, тоді за умовою задачі $\alpha - (\alpha - \beta) = 30^\circ$ або $\beta - (\alpha - \beta) = 30^\circ$.

Якщо $\alpha - (\alpha - \beta) = 30^\circ$, тоді $\alpha - \alpha + \beta = 30^\circ$. Отже, шукані кути 30° і $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

Якщо $\beta - (\alpha - \beta) = 30^\circ$, тоді $\beta - \alpha + \beta = 30^\circ$, $\alpha = 2\beta - 30^\circ$. Оскільки $\alpha + \beta = 180^\circ$, то $2\beta - 30^\circ + \beta = 180^\circ$, $3\beta = 210^\circ$, $\beta = 70^\circ$. Отже, шукані кути 70° і $180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

2) Оскільки середнє арифметичне двох внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 90° , то один із кутів дорівнює $90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$, другий $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

3) Оскільки сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180° , то 25% суми цих кутів дорівнює $180^\circ \times 0,25 = 45^\circ$, тоді один із кутів дорівнює $45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$, другий $180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$.

4) Нехай α і β — внутрішні односторонні кути, тоді за умовою задачі маємо

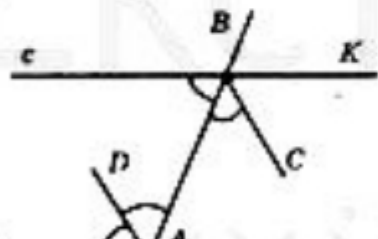
$$\alpha - \frac{3(\alpha - \beta)}{2} = 30^\circ \text{ або } \beta - \frac{3(\alpha - \beta)}{2} = 30^\circ.$$

Якщо $\alpha - \frac{3(\alpha - \beta)}{2} = 30^\circ$, то $2\alpha - 3\alpha + 3\beta = 60^\circ$, $3\beta - \alpha = 60^\circ$, $\alpha = 3\beta - 60^\circ$. Оскільки $\alpha + \beta = 180^\circ$, то $3\beta - 60^\circ + \beta = 180^\circ$, $4\beta = 240^\circ$, $\beta = 60^\circ$. Отже, шукані кути дорівнюють 60° і $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Якщо $\beta - \frac{3(\alpha - \beta)}{2} = 30^\circ$, то $2\beta - 3\alpha + 3\beta = 60^\circ$, $5\beta - 3\alpha = 60^\circ$, $\beta = \frac{3\alpha + 60^\circ}{5}$. Оскільки

$\alpha + \beta = 180^\circ$, то $\alpha + \frac{3\alpha + 60^\circ}{5} = 180^\circ$, $5\alpha + 3\alpha + 60^\circ = 900^\circ$, $8\alpha = 840^\circ$, $\alpha = 105^\circ$. Отже, шукані кути 105° і $180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$.
Відповідь: 1) 30° і 150° або 70° і 110° ; 2) 120° і 60° ; 3) 72° і 105° ; 4) 60° і 120° або 105° і 75° .

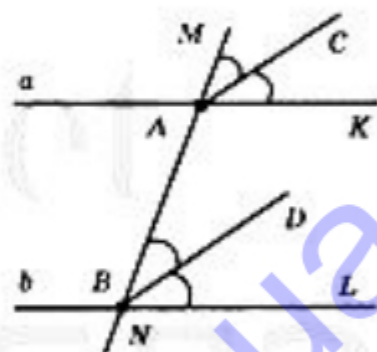
287.



і AD — бісектриси цих кутів, то $\angle CBA = \angle DAB$ (як половини рівних кутів).

Розглянемо прямі BC і AD і січну AB : $\angle CBA$ і $\angle DAB$ — внутрішні різносторонні кути і рівні, отже, $BC \parallel AD$. Отже, бісектриси двох внутрішніх різносторонніх кутів при паралельних прямих і січній паралельні.

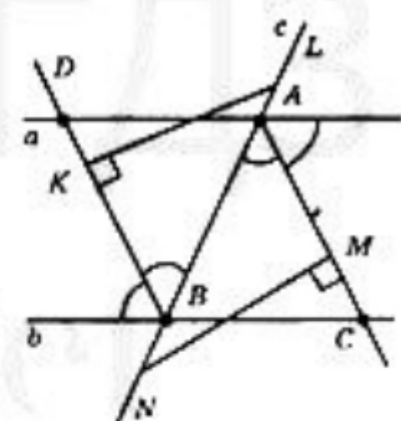
288.



Оскільки $a \parallel b$, то $\angle MAK = \angle ABL$ як відповідні кути. AC — бісектриса $\angle MAK$, BD — бісектриса $\angle ABL$. $\angle ABD = \angle MAC$ — як половини рівних кутів.

Розглянемо прямі AC і BD і січну AB : $\angle MAC$ і $\angle ABD$ відповідні кути і рівні, отже, $AC \parallel BD$. Отже, бісектриси двох відповідних кутів при паралельних прямих і січній не перетинаються.

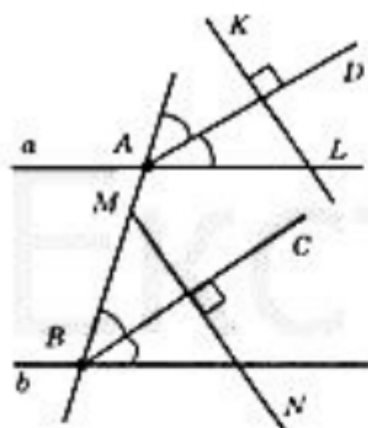
289. 1)



Нехай $a \parallel b$, AC і BD — бісектриси внутрішніх різносторонніх кутів, $KL \perp BD$, $MN \perp AC$. Згідно із задачею 287 маємо $AC \parallel BD$. Оскільки $KL \perp BD$ і $BD \parallel AC$, то згідно з наслідком 3 теореми про властивість паралельних прямих, маємо $KL \perp AC$.

Оскільки $KL \perp AC$, $MN \perp AC$, то згідно

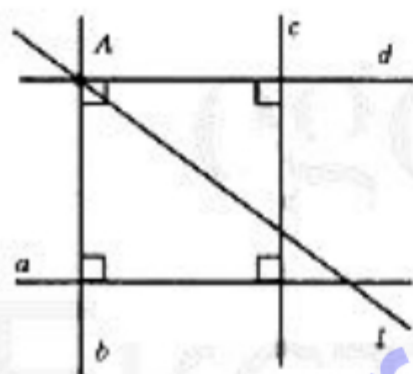
2)



Нехай $a \parallel b$, AD і BC — бісектриси відповідних кутів, $KL \perp AD$, $MN \perp BC$. Згідно із задачею 288 маємо $AD \parallel BC$. Оскільки $KL \perp AD$ і $AD \parallel BC$, то $KL \perp BC$.

Оскільки $KL \perp BC$, $MN \perp BC$, то $KL \parallel MN$. Отже, прямі, які перпендикулярні до бісектрис двох відповідних кутів при паралельних прямих і січній, паралельні.

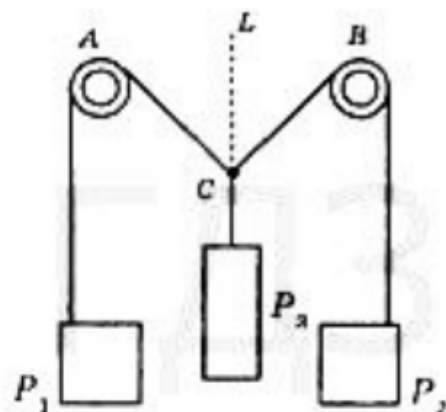
290.



Оскільки $a \perp c$ і $d \perp c$, то $d \parallel a$ (згідно з наслідком 3 ознаки паралельності прямих). Оскільки $c \perp a$, $b \perp a$, то $b \parallel c$ (згідно з наслідком 3 ознаки паралельності прямих). Нехай довільна пряма l проходить через точку перетину прямих b і d . Доведемо, що l не може бути паралельною ні до a , ні до c .

Припустимо, що $l \parallel a$, тоді через точку A проходить дві прямі d і l , які паралельні прямій a , що суперечить аксіомі паралельних прямих. Отже, припущення невірне, а правильно, що l перетинає a . Припустимо, що $l \parallel c$, тоді через точку A проходить дві прямі l і b , які паралельні c , що суперечить аксіомі паралельних прямих. Отже, припущення невірне, а правильно, що l перетинає c .

291.



Прямі AP_1 , CP_3 і BP_2 — паралельні. Тоді $\angle LCB = \angle CBP_2$, $\angle LCA = \angle CAP_1$ (як внутрішні різносторонні при паралельних прямих і січній). Тоді $\angle ACB = \angle LCB + \angle LCA = \angle CAP_1 + \angle CBP_2$.

Текстові завдання

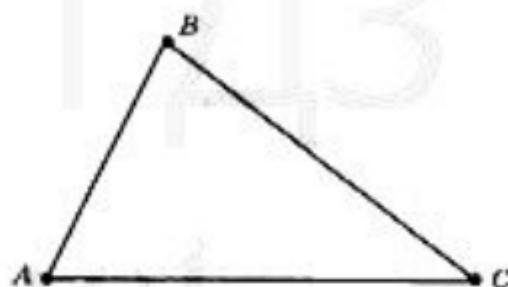
№ 1. 1. В. 2. Г. 3. А. 4. Г. 5. В.

№ 2. 1. Б. 2. Б, Г. 3. В. 4. А. 5. Б.

§ 10. Трикутник і його елементи

292. Намал. 194 зображені трикутники ABD , ABC , DBC . Проти кута C в трикутнику ABC лежить сторона AB , в трикутнику DBC — сторона BD . Прилеглими до кута C в трикутнику ABC є сторони AC і BC , в трикутнику DBC — сторони DC і BC .

293.



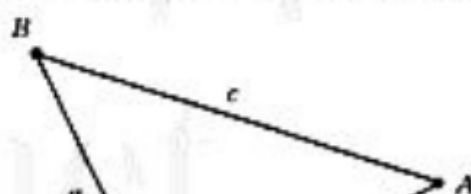
1) Проти кута A лежить сторона BC , проти кута B лежить сторона AC .

2) Проти сторони AB лежить кут C , проти сторони BC лежить кут A .

3) До сторони AB прилеглими кутами є $\angle A$ і $\angle B$.

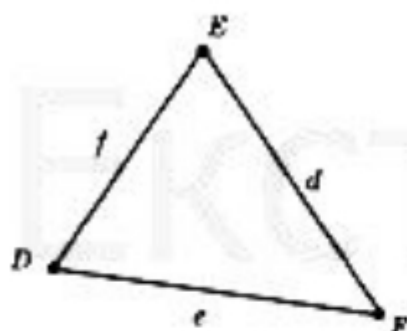
4) Між сторонами AC і BC лежить кут C .

294.



Вершини: B, A, C .

295.

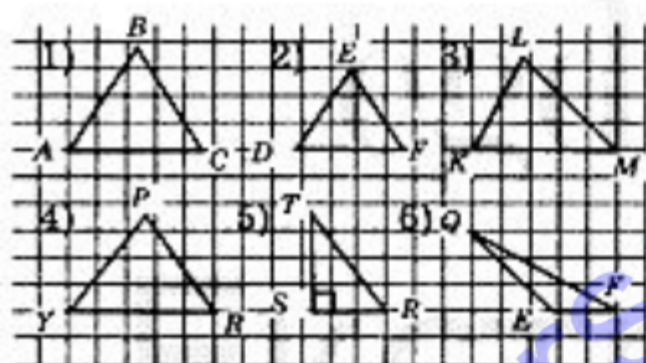


Сторони трикутника: DE, EF, FD . Куты трикутника: $\angle E, \angle F, \angle D$.

296. Оскільки $13 < 15 + 14, 15 < 14 + 13, 14 < 13 + 15$, то нерівність трикутника виконується.

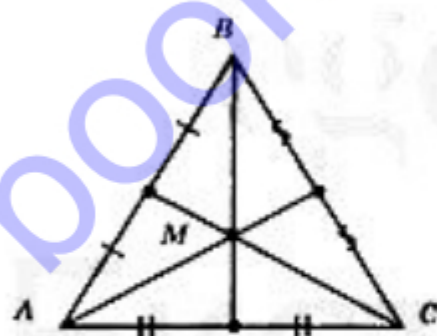
297. 1) $\triangle BFC$. 2) $\triangle AFB$ і $\triangle BFC$. 3) $\triangle ABC, \triangle ABD, \triangle FBD, \triangle DBC$. 4) $\triangle FBC$. 5) $\triangle FBD, \triangle CBD, \triangle ABD, \triangle ABC$. 6) $\triangle AFB$.

298.



299. Медіана — CL , бісектриса — BN , висота — AM .

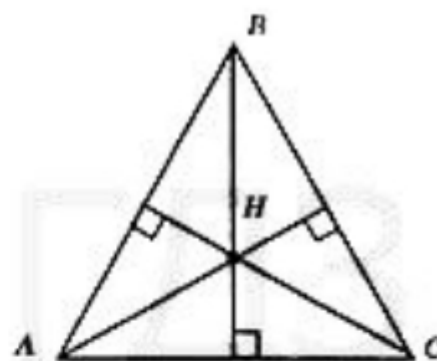
300.



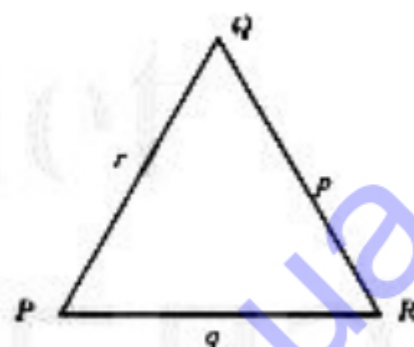
301.



302.



303.



1) Ні, проти сторони PQ лежить кут R .

2) Так.

3) Ні, між сторонами PR і OR лежить кут R .

4) Так.

304. Мал. 199. Із зображених відрізків не можна утворити трикутник, оскільки не виконується нерівність трикутника, бо $6 \text{ см} = 3 \text{ см} + 3 \text{ см}$.

Мал. 200. Із зображених відрізків можна утворити трикутник, оскільки виконується нерівність трикутника, бо $6 \text{ см} < 4 \text{ см} + 3 \text{ см}$.

305. 1) Так, бо виконується нерівність трикутника, оскільки $4 \text{ см} < 2 \text{ см} + 3 \text{ см}$.

2) Ні, бо не виконується нерівність трикутника, оскільки $13 \text{ см} = 6 \text{ см} + 7 \text{ см}$.

3) Так, бо виконується нерівність трикутника, оскільки $9 \text{ см} < 7 \text{ см} + 8 \text{ см}$.

306. 1) Різносторонній. 2) Рівносторонній, оскільки $0,3 \text{ дм} = 30 \text{ мм} = 3 \text{ см}$.

3) Рівнобедрений, оскільки $0,06 \text{ дм} = 6 \text{ мм} \neq 0,1 \text{ см}$.

307.



- 1) Основа AC , бічні сторони AB і BC .
- 2) Основа BC , бічні сторони AB і AC .
- 3) Основа AB , бічні сторони AC і BC .

308. Не можна накреслити рівносторонній трикутник, який не буде рівнобедреним, оскільки у рівностороннього трикутника всі сторони рівні.

309.

α	12 см	20 см	8 см	9 см
β	16 см	21 см	15 см	8 см
γ	18 см	29 см	17 см	14 см
P	46 см	70 см	40 см	31 см

310. Оскільки у рівностороннього трикутника всі сторони рівні, то, щоб знайти сторону рівностороннього трикутника за його периметром, треба периметр поділити на 3.

- 1) $36 \text{ см} : 3 = 12 \text{ см}$; 2) $45 \text{ см} : 3 = 15 \text{ см}$;
- 3) $72 \text{ см} : 3 = 24 \text{ см}$.

311. 1) $P = \alpha + 2\beta = 14 \text{ см} + 2 \times 12 \text{ см} = 14 \text{ см} + 24 \text{ см} = 38 \text{ см}$;

2) $P = \alpha + 2\beta = 16 \text{ см} + 2 \times 17 \text{ см} = 16 \text{ см} + 34 \text{ см} = 50 \text{ см}$;

3) $P = \alpha + 2\beta = 8 \text{ см} + 2 \times 5 \text{ см} = 8 \text{ см} + 10 \text{ см} = 18 \text{ см}$.

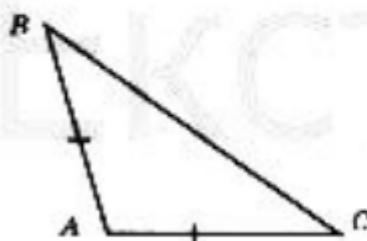
312. 1) Прямокутний. 2) Тупокутний. 3) Тупокутний.

313. 1) Прямокутний. 2) Гострокутний. 3) Тупокутний.

314. 1)



2)

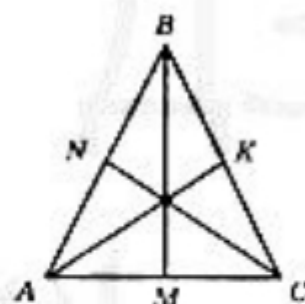


3)



- 315.** 1) Катети AB і AC , гіпотенуза BC .
- 2) Катети AB і BC , гіпотенуза AC .
- 3) Катети AB і BC , гіпотенуза AC .
- 4) Катети AB і AC , гіпотенуза BC .

316.



- 1) $AN = BN = AB : 2 = 5 \text{ см} : 2 = 2,5 \text{ см}$;
 $AM = CM = AC : 2 = 8 \text{ см} : 2 = 4 \text{ см}$;
 $BK = CK = BC : 2 = 7 \text{ см} : 2 = 3,5 \text{ см}$.

2) $AN = BN = 20 : 2 = 10 \text{ (см)}$;

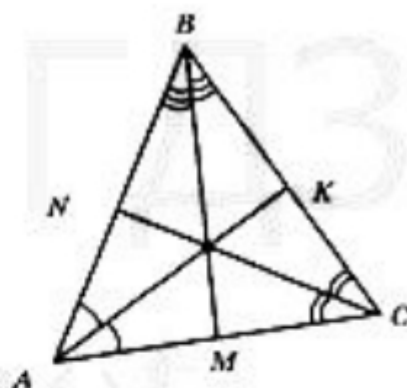
$AM = CM = BK = CK = 22 : 2 = 11 \text{ (см)}$.

3) $AN = BN = BK = CK = 10 : 2 = 5 \text{ (см)}$;
 $AM = CM = 16 : 2 = 8 \text{ (см)}$.

4) $AN = BN = AM = CM = BK = CK = 27 : 2 = 13,5 \text{ (см)}$.

317. Бісектриса трикутника — це відрізок бісектриси кута, а бісектриса кута — це промінь.

318.



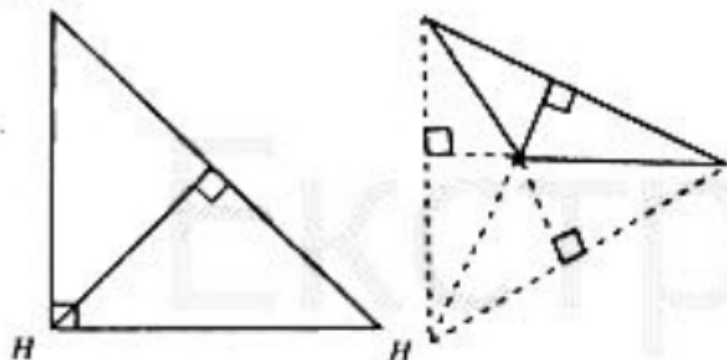
$$1) \angle BAK = \angle CAK = \frac{\angle A}{2} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ;$$

$$\angle BCN = \angle ACN = \frac{\angle C}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ;$$

$$\angle ABM = \angle CBM = \frac{\angle B}{2} = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ;$$

$$2) \angle BAK = \angle CAK = \frac{\angle A}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ;$$

319.



H — точка перетину висот.

320. 1) Сторони трикутника не можуть бути пропорційні числам 1, 2, 3, оскільки не буде виконуватися нерівність трикутника, бо $3k = k + 2k$, де $3k, 2k, k$ — довжини сторін трикутника.

2) Сторони трикутника можуть бути пропорційні числам 3, 4, 5, оскільки виконується нерівність трикутника, бо $5k < 3k + 4k$, де $3k, 4k, 5k$ — довжини сторін трикутника.

3) Сторони трикутника не можуть бути пропорційні числам 3, 5, 9, оскільки не буде виконуватися нерівність трикутника, бо $9k > 3k + 5k$, де $3k, 5k, 9k$ — довжини сторін трикутника.

321. 1) Якщо сторони трикутника відносяться як 1 : 1 : 1, то вони рівні. Отже, даний трикутник рівносторонній.

2) Якщо сторони трикутника відносяться як 5 : 12 : 13, то трикутник не має рівних сторін. Отже, даний трикутник різносторонній.

3) Якщо сторони трикутника відносяться як 5 : 5 : 8, то трикутник має дві рівні сторони. Отже, даний трикутник рівнобедрений.

322. 1) Оскільки $\alpha > \epsilon$ і $\beta > \epsilon$, то $\alpha = \beta$, отже, AB — основа рівнобедреного трикутника, BC і CA — бічні сторони.

2) Оскільки $\alpha < \beta$ і $\epsilon < \beta$, то $\alpha = \epsilon$, отже, AC — основа рівнобедреного трикутника, BA і BC — бічні сторони.

3) Оскільки $\alpha \neq \beta$ і $\alpha \neq \epsilon$, то $\beta = \epsilon$, отже, BC — основа рівнобедреного трикутника.

1) Якщо $\beta = 6$ см, то $\alpha = P - 2\beta = 23 - 12 = 11$ (см).

2) Якщо $\alpha = 3$ см, то

$$b = \frac{P - \alpha}{2} = \frac{23 - 3}{2} = 10 \text{ (см)}.$$

3) Якщо $\alpha = \beta + 2$, то $(\beta + 2) + 2\beta = 23$; $3\beta = 21$; $\beta = 7$ (см), $\alpha = 7 + 2 = 9$ (см).

Відповідь: 1) 11 см; 2) 10 см; 3) 7 см, 7 см, 9 см.

324.



Нехай $\triangle ABC$ — рівнобедрений, $\triangle ADC$ — рівносторонній.

Оскільки $AC = CD = AD$, то

$$AC = \frac{30}{3} = 10 \text{ (см)}, \text{ тоді}$$

$$AB = BC = \frac{36 - 10}{2} = \frac{26}{2} = 13 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 10 см, 13 см, 13 см.

325. 1) Периметр трикутника не може дорівнювати 14 см, бо в такому разі третя сторона дорівнює $14 \text{ см} - 4 \text{ см} - 7 \text{ см} = 3 \text{ см}$, а трикутника зі сторонами 4 см, 7 см, 3 см не існує, бо не виконується нерівність трикутника, оскільки $7 \text{ см} = 4 \text{ см} + 3 \text{ см}$.

2) Периметр трикутника може дорівнювати 21 см, оскільки третя сторона дорівнює $21 \text{ см} - 7 \text{ см} - 4 \text{ см} = 10 \text{ см}$ і виконується нерівність трикутника $10 \text{ см} < 7 \text{ см} + 4 \text{ см}$.

3) Периметр трикутника не може дорівнювати 31 см, бо в такому разі третя сторона дорівнює $31 \text{ см} - 7 \text{ см} - 4 \text{ см} = 20 \text{ см}$, а трикутника зі сторонами 20 см, 7 см, 4 см не існує, бо не виконується нерівність трикутника.

двох інших сторін дорівнює $70 - 36 = 34$ (мм). Тоді за нерівністю трикутника маємо $36 < 34$. Оскільки отримана нерівність неправильна, то не існує трикутника зі стороною 36 мм і периметром 70 мм.

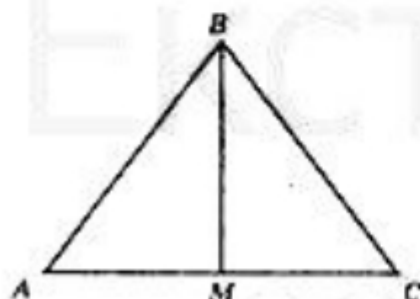
327. Нехай $\alpha = 10$ см, $\beta = 14$ см, $\gamma = \beta + 2 = 14 + 2 = 16$ (см). Тоді $P = \alpha + \beta + \gamma = 10$ см + 14 см + 16 см = 40 см.

Відповідь: 40 см.

328. Нехай $\alpha = x$ см, тоді $\beta = 2x$ см, $\gamma = 15$ см. За умовою задачі маємо рівняння: $x + 2x + 15 = 45$; $3x = 30$; $x = 10$. Отже, невідомі сторони трикутника 10 см і 20 см.

Відповідь: 10 см, 20 см.

329.



$P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC = 15$ см; $P_{\triangle ABM} = AB + BM + AM = 11$ см; $P_{\triangle BCM} = BC + CM + BM = 14$ см. Оскільки $P_{\triangle ABM} + P_{\triangle BCM} = P_{\triangle ABC} + 2BM$, то маємо: 11 см + 14 см = 15 см + $2BM$; $2BM = 10$ см; $BM = 5$ см.

Відповідь: 5 см.

330.



Нехай в рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$), BM — медіана, $AM = MC$. Тоді $P_{\triangle ABM} = AB + BM + AM$, враховуючи, що $AB = BC$, $AM = MC$, маємо: $AB + BM + AM = BC + BM + MC = P_{\triangle BCM}$. Отже, $P_{\triangle ABM} = P_{\triangle BCM}$.

331.



Нехай $KM = 10$ см, $KL = LM = 13$ см. LP — медіана, $P_{\triangle KLP} = 30$ см. Оскільки $KP = \frac{1}{2} KM = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ (см), $P_{\triangle KLP} = KL + LP + KP$, $30 = 13 + LP + 5$, звідси $LP = 12$ (см).

Відповідь: 12 см.

332. 1) Оскільки кути трикутника дорівнюють $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ частинам розгорнутого

кута, то вони дорівнюють $\frac{1}{6} \cdot 180^\circ = 30^\circ$,

$\frac{1}{3} \cdot 180^\circ = 60^\circ$, $\frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$. Отже, три-

кутник — прямокутний.

2) Оскільки кути трикутника дорівнюють $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{5}{9}$ частинам розгорнутого

кута, то вони дорівнюють $\frac{1}{9} \cdot 180^\circ = 20^\circ$,

$\frac{1}{3} \cdot 180^\circ = 60^\circ$, $\frac{5}{9} \cdot 180^\circ = 100^\circ$. Отже, три-

кутник — тупокутний.

3) Оскільки кути трикутника дорівнюють $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}$ частинам розгорнутого

кута, то вони дорівнюють $\frac{1}{3} \cdot 180^\circ = 60^\circ$,

$\frac{2}{9} \cdot 180^\circ = 40^\circ$, $\frac{4}{9} \cdot 180^\circ = 80^\circ$. Отже, три-

кутник — гострокутний.

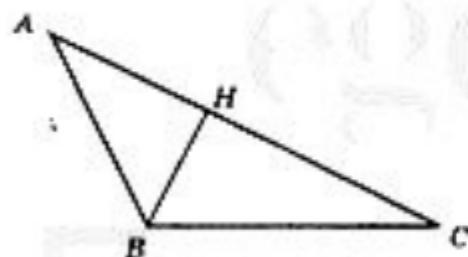
333. 1) Якщо бісектриса трикутника утворює зі стороною кута кут, що дорівнює 25% розгорнутого кута, то градусна міра цього кута дорівнює $180^\circ \times 0,25 = 45^\circ$, а кут трикутника дорівнює $2 \times 45^\circ = 90^\circ$. Отже, трикутник — прямокутний.

2) Якщо бісектриса трикутника утворює зі стороною кута кут, що дорівнює 50% прямого кута, то градусна міра цього кута дорівнює $90^\circ \times 0,5 = 45^\circ$, а кут трикутника дорівнює $2 \times 45^\circ = 90^\circ$. Отже,

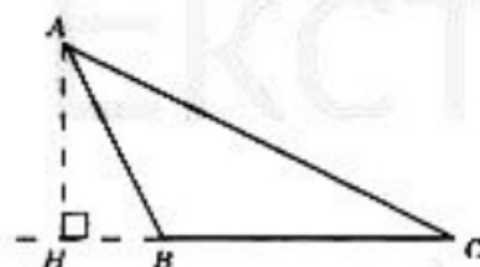
цього кута дорівнює $180^\circ \times 0,3 = 54^\circ$, а кут трикутника дорівнює $2 \times 54^\circ = 108^\circ$. Отже, трикутник — тупокутний.

4) Якщо бісектриса трикутника утворює зі стороною кута кут, що дорівнює 60 % прямого кута, то градусна міра цього кута дорівнює $90^\circ \times 0,6 = 54^\circ$, а кут трикутника дорівнює $2 \times 54^\circ = 108^\circ$. Отже, трикутник — тупокутний.

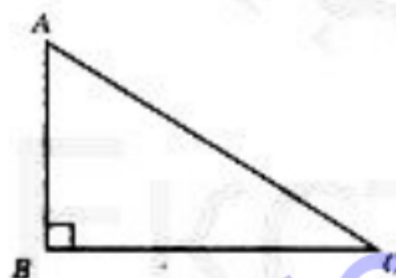
334. 1) Так.



2)



3) Ні. Трикутник буде прямокутний.



335. 1) Третьою стороною не може бути сторона, що дорівнює 5 см, оскільки тоді не буде виконуватись нерівність трикутника, бо $12 \text{ см} > 5 \text{ см} + 5 \text{ см}$. Третьою стороною може бути сторона, що дорівнює 12 см, оскільки виконується нерівність трикутника, бо $12 \text{ см} < 12 \text{ см} + 5 \text{ см}$. Отже, третя сторона — 12 см.

2) Третьою стороною не може бути сторона, що дорівнює 6 см, оскільки тоді не буде виконуватись нерівність трикутника, бо $15 \text{ см} > 6 \text{ см} + 6 \text{ см}$. Третьою стороною може бути сторона, що дорівнює 15 см, оскільки виконується нерівність

ка, бо $14 \text{ см} > 7 \text{ см} + 7 \text{ см}$. Третьою стороною може бути сторона, що дорівнює 14 см, оскільки виконується нерівність трикутника, бо $14 \text{ см} < 14 \text{ см} + 7 \text{ см}$. Отже, третя сторона — 14 см.

Відповідь: 1) 12 см; 2) 15 см; 3) 14 см.

336. Нехай a — основа рівнобедреного трикутника, тоді бічна сторона — $\beta = a n$, периметр $P = a + 2\beta = a + 2an$. Звідси

$$P = a(1 + 2n), \quad a = \frac{P}{1 + 2n}.$$

1) Якщо $n = 2$, $P = 50$ см, то $a = \frac{50}{1 + 2 \cdot 2} = \frac{50}{5} = 10$ (см), $\beta = 10 \times 2 = 20$ (см). Отже, сторони трикутника дорівнюють 10 см, 20 см, 20 см.

2) Якщо $n = 3$, $P = 35$ см, то $a = \frac{35}{1 + 2 \cdot 3} = \frac{35}{7} = 5$ (см), $\beta = 5 \times 3 = 15$ (см). Отже, сторони трикутника дорівнюють 5 см, 15 см, 15 см.

3) Якщо $n = 4$, $P = 63$ см, то $a = \frac{63}{1 + 2 \cdot 4} = \frac{63}{9} = 7$ (см), $\beta = 4 \times 7 = 28$ (см). Отже, сторони трикутника дорівнюють 7 см, 28 см, 28 см.

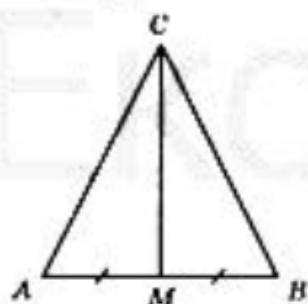
Відповідь: 1) 10 см, 20 см, 20 см; 2) 5 см, 15 см, 15 см; 3) 7 см, 28 см, 28 см.

337. Друга сторона трикутника дорівнює $7 \times 2 = 14$ (см), третя сторона дорівнює $14 - 4 = 10$ (см). Отже, периметр трикутника дорівнює $7 \text{ см} + 14 \text{ см} + 10 \text{ см} = 31$ см.

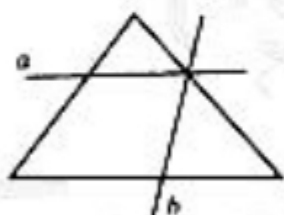
Відповідь: 31 см.

338. Нехай a , β і c — сторони трикутника, тоді $a + \beta = 20$ см, $\beta + c = 22$ см, $a + c = 28$ см. Додамо почленно три останні рівності $a + \beta + \beta + c + a + c = 20 + 22 + 28$; $2(a + \beta + c) = 70$; $a + \beta + c = 70 : 2 = 35$ (см).

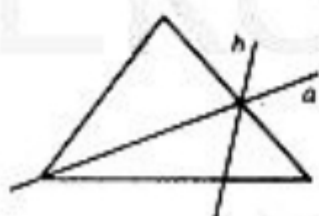
$AC + CM + AM = BC + CM + MB$. Враховуючи, що $AM = MB$, маємо $AC = BC$. Отже, $\triangle ABC$ — рівнобедрений.



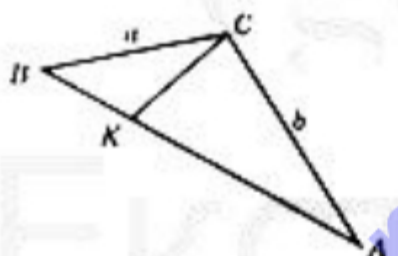
340. 1)



2)



341.



Основа висоти ділить гіпотенузу AB на відрізки, що відносяться як $a^2 : b^2$, починаючи від вершини B , отже, ці відрізки відповідно дорівнюють $BK = \frac{ca^2}{a^2 + b^2}$.

$$KA = \frac{cb^2}{a^2 + b^2}$$

1) Якщо $a = 6$ см, $b = 8$ см, $c = 10$ см, тоді $BK = \frac{10 \cdot 36}{36 + 64} = \frac{360}{100} = 3,6$ (см), $KA = 10$ см $- 3,6$ см $= 6,4$ см. $P_{\triangle KCA} = P_{\triangle KCB} = (8$ см $+ 6,4$ см $+ CK) - (6$ см $+ 3,6$ см $+ CK) = 14,4$ см $- 9,6$ см $= 4,8$ см.

2) Якщо $a = 7$ см, $b = 24$ см, $c = 25$ см, тоді $BK = \frac{25 \cdot 49}{49 + 576} = \frac{1225}{625} = 1,96$ (см), $KA =$

3) Якщо $a = 5$ см, $b = 12$ см, $c = 13$ см, тоді

$$BK = \frac{13 \cdot 25}{169} = \frac{25}{13} = 1 \frac{12}{13} \text{ (см)},$$

$$KA = 13 \text{ см} - 1 \frac{12}{13} \text{ см} = 11 \frac{1}{13} \text{ см.}$$

$$P_{\triangle KCA} = P_{\triangle KCB} = \left(11 \frac{1}{13} \text{ см} + 12 \text{ см} + CK \right) -$$

$$- \left(5 \text{ см} + 1 \frac{12}{13} \text{ см} + CK \right) = 9 \frac{2}{13} \text{ см} + 7 \text{ см} =$$

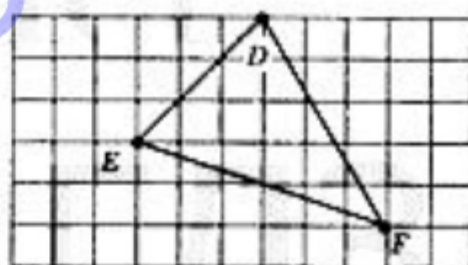
$$= 16 \frac{2}{13} \text{ см.}$$

Відповідь: 1) 4,8 см; 2) 37,08 см;

3) $16 \frac{2}{13}$ см.

§ 11. Властивості кутів трикутника

344.



$$\angle E = 60^\circ, \angle F = 40^\circ, \angle D = 80^\circ.$$

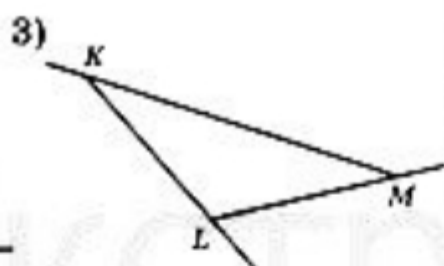
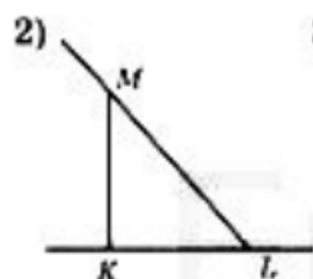
$$\angle E + \angle F + \angle D = 60^\circ + 40^\circ + 80^\circ = 180^\circ.$$

345. На мал. 208 неправильно сказано градусну міру кутів $\triangle ABC$, оскільки $\triangle ABC$ — прямокутний, а $\angle B + \angle C = 40^\circ + 40^\circ = 80^\circ \neq 90^\circ$ (так як сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°).

346. Розгорнутий кут ABC утворюють кути ABM, MBO, OBC . $\angle BOM = \angle MBA = 20^\circ$, $\angle BOM = \angle OBC = 60^\circ$. $\angle MBO + \angle BOM + \angle OMB = 100^\circ + 60^\circ + 20^\circ = 180^\circ$.

347. Зовнішні кути: $\angle PCA$ і $\angle DCB$.

348. 1)



349. Мал. 211. $\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - 70^\circ - 55^\circ = 55^\circ$.

Мал. 212. $\angle B = 90^\circ - \angle A - 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.

350. 1) $180^\circ - 20^\circ - 40^\circ = 120^\circ$;

2) $180^\circ - 100^\circ - 30^\circ = 50^\circ$;

3) $180^\circ - 80^\circ - 60^\circ = 40^\circ$.

351. 1) Оскільки $70^\circ + 51^\circ + 58^\circ = 179^\circ \neq 180^\circ$, то кути трикутника не можуть дорівнювати $70^\circ, 51^\circ, 58^\circ$.

2) Оскільки $42^\circ + 89^\circ + 49^\circ = 180^\circ$, то кути трикутника можуть дорівнювати $42^\circ, 89^\circ, 49^\circ$.

3) Оскільки $65^\circ + 75^\circ + 41^\circ = 181^\circ \neq 180^\circ$, то кути трикутника не можуть дорівнювати $65^\circ, 75^\circ, 41^\circ$.

352. 1) $30^\circ + n + n + 30^\circ = 180^\circ, 2n = 120^\circ, n = 60^\circ$. Отже, $\angle B = 60^\circ, \angle C = 90^\circ$.

2) $n + 2n + 72^\circ = 180^\circ, 3n = 108^\circ, n = 36^\circ$. Отже, $\angle A = 36^\circ, \angle B = 72^\circ$.

3) $120^\circ + n + 30^\circ + n = 180^\circ, 2n = 30^\circ, n = 15^\circ$. Отже, $\angle B = 45^\circ, \angle C = 15^\circ$.

353. 1) Трикутник не може мати два прямих кути, оскільки сума трьох кутів була б більша за 180° , це суперечить теоремі про суму кутів трикутника.

2) Трикутник не може мати два тупих кути, оскільки сума трьох кутів була б більша за 180° , це суперечить теоремі про суму кутів трикутника.

3) Трикутник не може мати тупий і прямий кут, оскільки сума трьох кутів була б більша за 180° , це суперечить теоремі про суму кутів трикутника.

354. 1) Кожний кут трикутника не може бути меншим від 60° , оскільки б тоді сума кутів трикутника була б мен-

ше суперечить теоремі про суму кутів трикутника.

355. 1) Третій кут трикутника дорівнює $180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ$. Отже, гострокутний трикутник не може мати кути 30° і 60° .

2) Третій кут трикутника дорівнює $180^\circ - 25^\circ - 55^\circ = 100^\circ$. Отже, гострокутний трикутник не може мати кути 25° і 55° .

3) Третій кут трикутника дорівнює $180^\circ - 43^\circ - 52^\circ = 85^\circ$. Отже, гострокутний трикутник може мати кути 43° і 52° .

356. Оскільки сума гострих кутів трикутника дорівнює 90° , то невідомий гострий кут дорівнює: 1) $90^\circ - 52^\circ = 38^\circ$;

2) $90^\circ - 24^\circ = 66^\circ$; 3) $90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$.

Відповідь: 1) 38° ; 2) 66° ; 3) 25° .

357. 1) Якщо один із кутів трикутника дорівнює сумі двох інших кутів, то трикутник прямокутний, оскільки кут дорівнює $180^\circ : 2 = 90^\circ$.

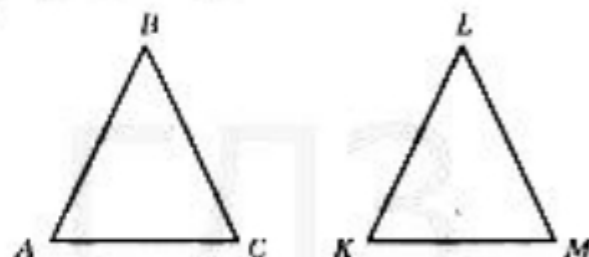
2) Якщо $\alpha > \beta + \gamma$, то $2\alpha > \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Отже, $2\alpha > 180^\circ, \alpha > 90^\circ$. Отже, трикутник — тупокутний.

358. 1) Третій кут трикутника дорівнює $180^\circ - 40^\circ - 50^\circ = 90^\circ$. Отже, трикутник — прямокутний.

2) Третій кут трикутника дорівнює $180^\circ - 25^\circ - 35^\circ = 120^\circ$. Отже, трикутник — тупокутний.

3) Третій кут трикутника дорівнює $180^\circ - 80^\circ - 40^\circ = 60^\circ$. Отже, трикутник — гострокутний.

359.



Нехай у трикутників ABC і KLM $\angle A = \angle K = \alpha, \angle B = \angle L = \beta$. Доведемо, що $\angle C = \angle M$. Оскільки $\angle C = 180^\circ - \angle A -$

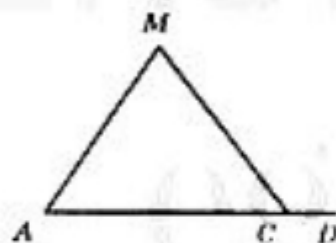
361. 1) $180^\circ - \angle A = 180^\circ - 57^\circ = 123^\circ$;

2) $180^\circ - \angle B = 180^\circ - 34^\circ = 146^\circ$;

3) $180^\circ - \angle C = 180^\circ - 76^\circ = 104^\circ$.

362. Зовнішній кут при вершині K трикутника NOK дорівнює $80^\circ + 60^\circ = 140^\circ$.

363.



$\angle A$	35°	90°	20°	30°
$\angle B$	55°	45°	95°	30°
$\angle C$	90°	45°	65°	120°
$\angle BCD$	90°	135°	115°	60°

364. У трикутника шість зовнішніх кутів.

365. 1) Оскільки кути трикутника пропорційні числам 1, 2, 3, маємо:

$$\frac{180^\circ}{1+2+3} \cdot 1 = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ; \quad \frac{180^\circ}{1+2+3} \cdot 2 = 60^\circ;$$

$$\frac{180^\circ}{1+2+3} \cdot 3 = 90^\circ. \text{ Отже, кути трикутника дорівнюють } 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ.$$

2) Оскільки кути трикутника пропорційні числам 4, 5, 6, маємо: $\frac{180^\circ}{4+5+6} \cdot 4 = 48^\circ$;

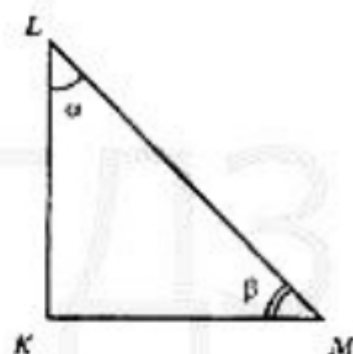
$$\frac{180^\circ}{4+5+6} \cdot 5 = 50^\circ; \quad \frac{180^\circ}{4+5+6} \cdot 6 = 72^\circ. \text{ Отже,}$$

кути трикутника дорівнюють $48^\circ, 50^\circ, 72^\circ$.

3) Оскільки кути трикутника пропорційні числам 5, 5, 8, маємо: $\frac{180^\circ}{5+5+8} \cdot 5 = 50^\circ$;

$$\frac{180^\circ}{5+5+8} \cdot 5 = 50^\circ; \quad \frac{180^\circ}{5+5+8} \cdot 8 = 80^\circ. \text{ Отже,}$$

366.



1) Нехай $\beta = 2\alpha$, тоді, оскільки $\alpha + \beta = 90^\circ$, маємо: $\alpha + 2\alpha = 90^\circ$, $3\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$.

2) Нехай $\alpha = \beta - 20^\circ$, тоді, оскільки $\alpha + \beta = 90^\circ$, маємо: $\beta - 20^\circ + \beta = 90^\circ$, $2\beta = 110^\circ$, $\beta = 55^\circ$, $\alpha = 55^\circ - 20^\circ = 35^\circ$.

3) Нехай $\alpha = 2m$, $\beta = 3m$, тоді, оскільки $\alpha + \beta = 90^\circ$, маємо: $2m + 3m = 90^\circ$, $5m = 90^\circ$, $m = 18^\circ$. Отже, $\alpha = 18^\circ \times 2 = 36^\circ$, $\beta = 18^\circ \times 3 = 54^\circ$.

Відповідь: 1) $30^\circ, 60^\circ$; 2) $35^\circ, 55^\circ$; 3) $36^\circ, 54^\circ$.

367. Мал. 215. Оскільки $BD \parallel AC$, то $\angle ACB = \angle CBD$ — як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих BD і AC і січній BC . $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A + \angle ABC + \angle CBD = \angle A + \angle ABD = 180^\circ$, оскільки $\angle A$ і $\angle ABD$ — внутрішні односторонні кути при паралельних прямих BD і AC і січній AB . Отже, $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

Мал. 216. Оскільки $AE \parallel BD$, то $\angle EAB = \angle DBA$ — як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих AE і BD і січній AB . Оскільки $BD \parallel CF$, то $\angle DBC = \angle FCB$ — як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих BD і CF і січній BC . Тоді $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle ABD + \angle DBC + \angle BAC + \angle ACB = \angle EAB + \angle FCB + \angle BAC + \angle ACB = (\angle EAB + \angle BAC) + (\angle FCB + \angle ACB) = \angle EAC + \angle ACD = 180^\circ$ (оскільки кути EAC і ACD — внутрішні односторонні при паралельних прямих AE і FC і січній AC , то $\angle EAC + \angle ACD = 180^\circ$).

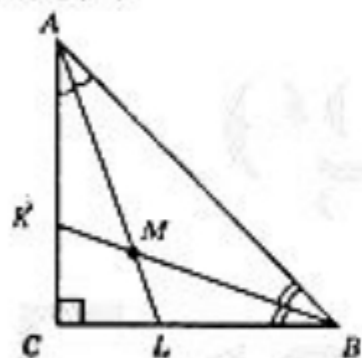
368. Нехай в прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$), $\angle A = \alpha$, $\angle B = \gamma$,

Тоді $\angle AMB = 180^\circ - \angle MAB - \angle MBA =$

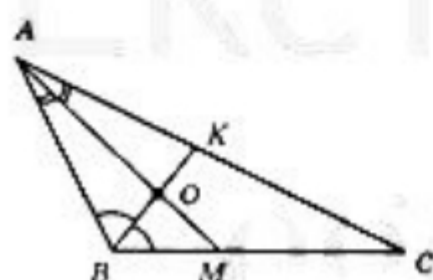
$$= 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) =$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

Відповідь: 135° .



369.



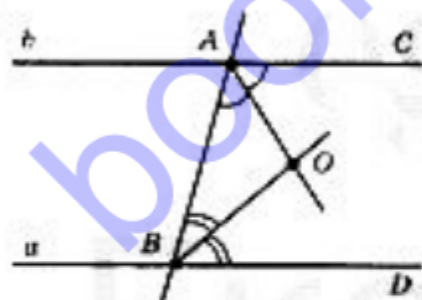
Нехай $\angle A = 64^\circ$, $\angle B = 106^\circ$. Оскільки AM і BK — бісектриси кутів $\angle A$ і $\angle B$, то $\angle ABO = \frac{\angle B}{2} = \frac{106^\circ}{2} = 53^\circ$,

$$\angle BAO = \frac{\angle A}{2} = \frac{64^\circ}{2} = 32^\circ.$$

З $\triangle ABO$: $\angle AOB = 180^\circ - 32^\circ - 53^\circ = 95^\circ$.

Відповідь: 95° .

370.



Нехай $a \parallel b$, тоді $\angle BAC + \angle ABD = 180^\circ$ — як внутрішні односторонні кути при паралельних прямих a і b і січній AB . AO — бісектриса кута BAC , $\angle BAO = \frac{1}{2} \angle BAC$,

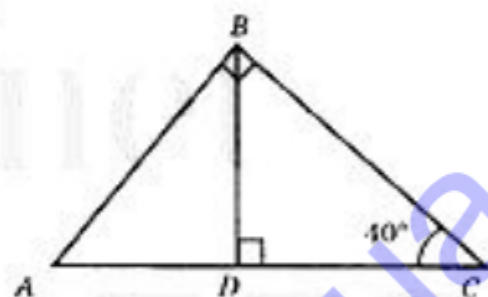
$$- \frac{1}{2} \angle BAC - \frac{1}{2} \angle ABD =$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABD) = 180^\circ -$$

$$- \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

Відповідь: 90° .

371.



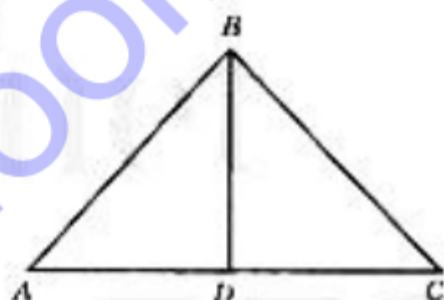
З прямокутного $\triangle DBC$:

$$\angle DBC = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ,$$

$$\angle ADB = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ.$$

Відповідь: 40° .

372.



Нехай $\angle ABD = \angle CBD = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.

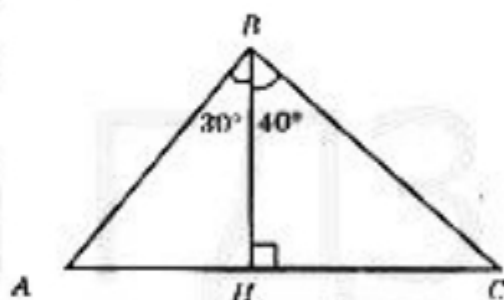
З прямокутного $\triangle BCD$ маємо:

$$\angle BCD = 90^\circ - \angle CBD = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ.$$

З прямокутного $\triangle ABD$ маємо:

$$\angle BAD = 90^\circ - \angle ABD = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ.$$

373.

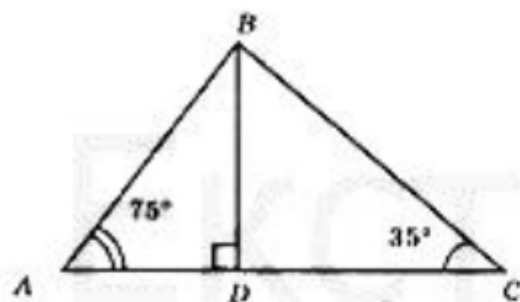


З прямокутного $\triangle ABH$:

$$\angle A = 90^\circ - \angle ABH = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

З прямокутного $\triangle HBC$:

374.

З прямокутного $\triangle ABD$:

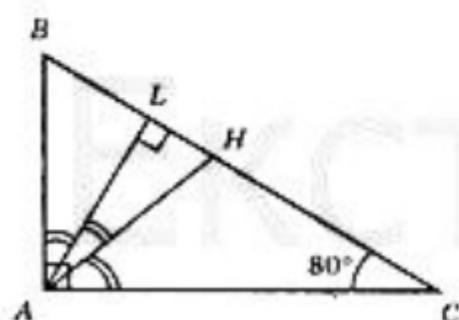
$$\angle ABD = 90^\circ - \angle A = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ.$$

З прямокутного $\triangle DBC$:

$$\angle DBC = 90^\circ - \angle C = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ.$$

Відповідь: $15^\circ, 55^\circ$.

375.



Нехай у прямокутному $\triangle ABC$ ($\angle A = 90^\circ$) $\angle C = 80^\circ$, AH — висота, AL — бісектриса кута A , $\angle BAL = \angle CAL = 90^\circ : 2 = 45^\circ$.

З прямокутного $\triangle AHC$:

$$\angle HAC = 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ.$$

Тоді $\angle LAH = \angle CAL - \angle HAC = 45^\circ - 10^\circ = 35^\circ$.

Відповідь: 35° .

376.

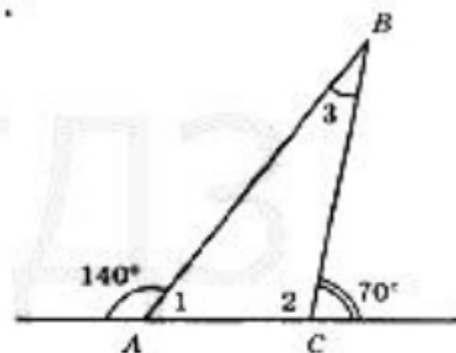


Нехай у прямокутному $\triangle ABC$ ($\angle A = 90^\circ$) $AH \perp CD$, AL — бісектриса, $\angle CAL = \angle BAL = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$. $\angle LAH = 30^\circ$.

$$\angle HAB = \angle BAL - \angle LAH = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ.$$

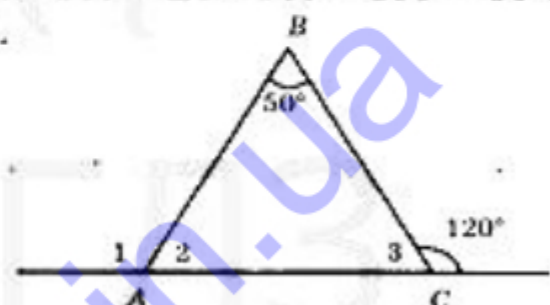
З прямокутного $\triangle AHB$: $\angle B = 90^\circ - \angle HAB = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$. $\angle CAH = \angle CAL + \angle LAH =$

377. Мал. 217.



$$\angle 1 = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ, \angle 2 = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ, \angle 3 = 140^\circ - \angle 2 = 140^\circ - 110^\circ = 30^\circ.$$

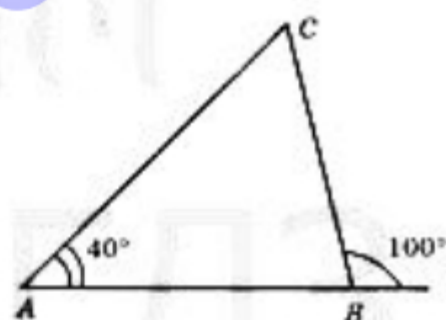
Мал. 218.



$$\angle 3 = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ, \angle 2 = 120^\circ - 50^\circ = 70^\circ, \angle 1 = \angle B + \angle 3 = 50^\circ + 60^\circ = 110^\circ.$$

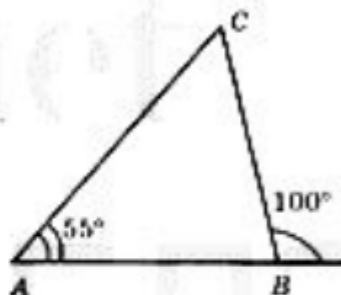
Відповідь: $60^\circ, 70^\circ, 110^\circ$.

378. 1)



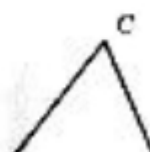
$\angle B = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$, $\angle C = 180^\circ - 40^\circ - 80^\circ = 60^\circ$. Отже, кути трикутника дорівнюють $40^\circ, 80^\circ, 60^\circ$.

2)



$\angle B = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$, $\angle C = 180^\circ - 55^\circ - 80^\circ = 45^\circ$. Отже, кути трикутника дорівнюють $55^\circ, 80^\circ, 45^\circ$.

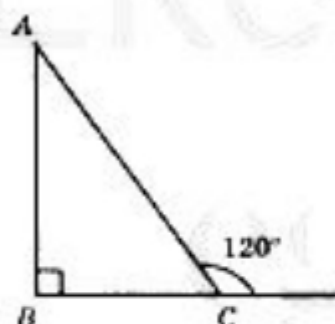
3)



$\angle B = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$, $\angle C = 100^\circ - 30^\circ = 70^\circ$. Отже, кути трикутника дорівнюють $30^\circ, 80^\circ, 70^\circ$.

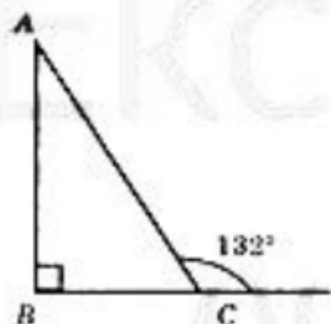
Відповідь: 1) $40^\circ, 80^\circ, 60^\circ$; 2) $55^\circ, 80^\circ, 45^\circ$; 3) $30^\circ, 80^\circ, 70^\circ$.

379. 1)



$\angle A = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$,
 $\angle C = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

2)



$\angle A = 132^\circ - 90^\circ = 42^\circ$,
 $\angle C = 180^\circ - 132^\circ = 48^\circ$.

3)



$\angle A = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$,
 $\angle C = 144^\circ - 90^\circ = 54^\circ$.

380. Оскільки зовнішній кут дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним, то розділимо 80° пропорційно числам 3 і 5 і знайдемо кути трикутника: $\frac{80^\circ}{3+5} \cdot 3 = 30^\circ$, $\frac{80^\circ}{3+5} \cdot 5 = 50^\circ$. Знайдемо третій кут трикутника, суміжний з даним зовнішнім кутом: $180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.
 Відповідь: $30^\circ, 50^\circ, 100^\circ$.

382. 1) Якщо один із зовнішніх кутів дорівнює 90° , то кут трикутника, суміжний з даним зовнішнім кутом, теж буде прямим. Отже, трикутник — прямокутний.

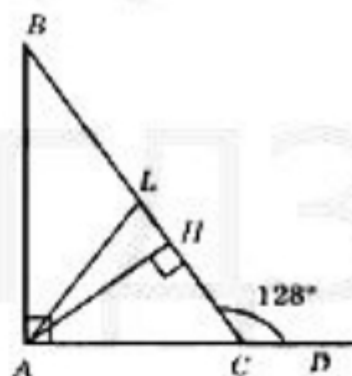
2) Якщо один із зовнішніх кутів дорівнює 32° , то кут трикутника, суміжний з даним зовнішнім кутом, дорівнює $180^\circ - 32^\circ = 148^\circ$. Отже, трикутник — тупокутний.

3) Якщо один із зовнішніх кутів дорівнює 89° , то кут трикутника, суміжний з даним зовнішнім кутом, дорівнює $180^\circ - 89^\circ = 91^\circ$. Отже, трикутник — тупокутний.

383. Якщо зовнішній кут трикутника дорівнює 70° , то кожний кут трикутника, не суміжний з ним, повинен бути меншим 70° , тому:

- 1) не може, бо $85^\circ > 70^\circ$;
- 2) може, бо $55^\circ < 70^\circ$;
- 3) може, бо $69^\circ < 70^\circ$.

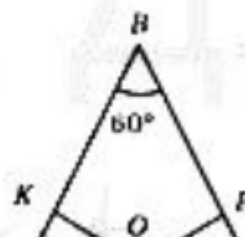
384.



$\angle BCD = 128^\circ$, $\angle BAC = 90^\circ$, $AN \perp BD$, AL — бісектриса кута A , $\angle BAL = \angle CAL = 45^\circ$. Оскільки $\angle BCD = 128^\circ$, то $\angle ACB = 180^\circ - 128^\circ = 52^\circ$.

З $\triangle ANC$: $\angle HAC = 90^\circ - 52^\circ = 38^\circ$, тоді $\angle LAN = \angle CAL - \angle HAC = 45^\circ - 38^\circ = 7^\circ$.
 Відповідь: 7° .

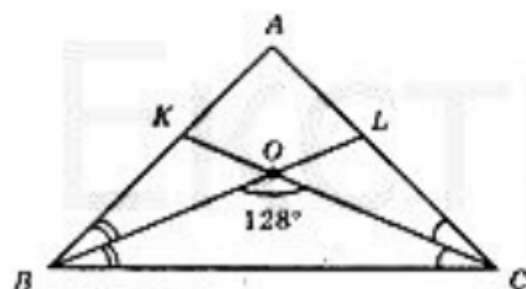
385.



$$\begin{aligned} \angle BAP &= \angle CAP, \angle ACK = \angle BCK. \text{ Тоді} \\ \angle AOC &= 180^\circ - \angle CAP - \angle ACK = 180^\circ - \\ &- \frac{1}{2} \angle A - \frac{1}{2} \angle C = 180^\circ - \frac{1}{2} (\angle A + \angle C) = \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2} (180^\circ - \angle B) = 180^\circ - \frac{1}{2} (180^\circ - \\ &- 60^\circ) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ. \end{aligned}$$

Знайдемо гострий кут між бісектрисами AP і KC : $\angle KOA = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.
Відповідь: 60° .

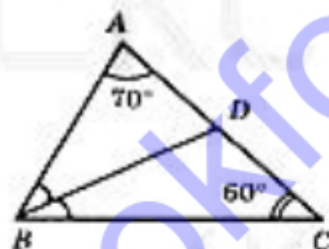
386.



Нехай CK — бісектриса кута C , $\angle ACK = \angle BCK$, BL — бісектриса кута B , $\angle ABL = \angle CBL$. $\angle BOC = 128^\circ$.
 $\angle OBC + \angle OCB = 180^\circ - 128^\circ = 52^\circ$, тоді
 $\angle B + \angle C = 2 \times 52^\circ = 104^\circ$. Отже, $\angle A = 180^\circ - 104^\circ = 76^\circ$.

Відповідь: 76° .

387.



$\angle B = 180^\circ - 70^\circ - 60^\circ = 50^\circ$, $\angle ABD = \angle CBD = 50^\circ : 2 = 25^\circ$ (оскільки BD — бісектриса кута B).

З $\triangle ABD$: $\angle ADB = 180^\circ - 70^\circ - 25^\circ = 85^\circ$.
Отже, кути трикутника ABD : $70^\circ, 25^\circ, 85^\circ$.

З $\triangle BDC$: $\angle BDC = 180^\circ - 60^\circ - 25^\circ = 95^\circ$.
Отже, кути трикутника DBC : $60^\circ, 25^\circ, 95^\circ$.

Відповідь: $70^\circ, 25^\circ, 85^\circ$ і $60^\circ, 25^\circ, 95^\circ$.

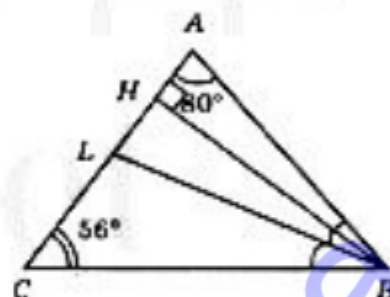
388.

$AD \perp BC$, $\angle C = 50^\circ$, $\angle B = 110^\circ$, $\angle DBA$ — суміжний з кутом B , $\angle DBA = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

З $\triangle DBA$: $\angle DAB = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$. З $\triangle CDA$: $\angle CAD = 90^\circ - \angle C = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$.

Отже, $\angle CAD = 2\angle BAD$.

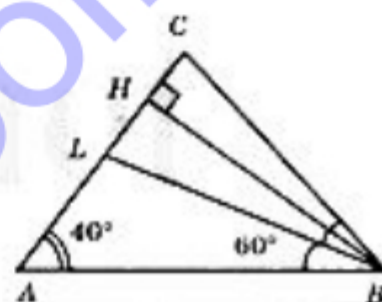
389. 1)



Нехай $BH \perp AC$, BL — бісектриса.

$\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - 80^\circ - 56^\circ = 44^\circ$, тоді $\angle ABL = \angle CBL = 44^\circ : 2 = 22^\circ$.
Із $\triangle ABH$: $\angle ABH = 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ$. Тоді
 $\angle HBL = \angle ABL - \angle ABH = 22^\circ - 10^\circ = 12^\circ$.

2)

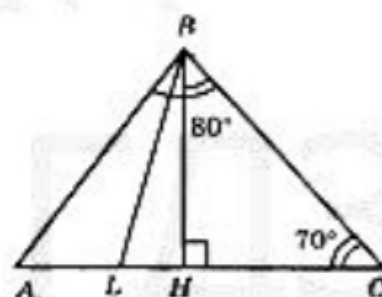


Нехай $BH \perp AC$, BL — бісектриса кута B .
 $\angle C = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ$.

Із $\triangle CBH$: $\angle CBH = 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ$.

$\angle HBL = \angle CBL - \angle CBH = \frac{1}{2} \angle B - \angle CBH = 30^\circ - 10^\circ = 20^\circ$.

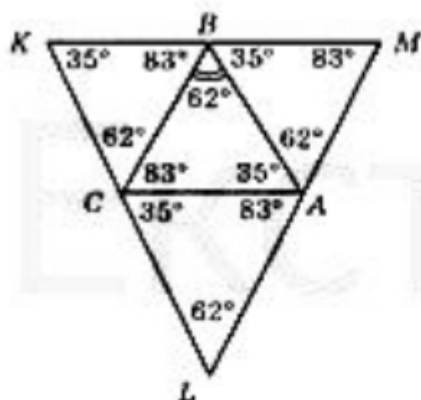
3)



Нехай $BH \perp AC$, BL — бісектриса кута B .
 $\angle A = 180^\circ - 80^\circ - 70^\circ = 30^\circ$.

Із $\triangle ABH$: $\angle ABH = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

390.



Нехай $KM \parallel AC$, $LM \perp CB$, $KL \parallel AB$.
 $\angle A = 35^\circ$, $\angle B = 62^\circ$, тоді $\angle C = 180^\circ - 35^\circ - 62^\circ = 83^\circ$. $\angle KBC = 83^\circ$ (як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих KM і CA і січній CB). $\angle MBA = 35^\circ$ (як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих KM і CA і січній AB). $\angle KCB = 62^\circ$ (як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих KL і BA і січній CB). $\angle ACL = \angle BAC = 35^\circ$ (як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих KL і BA і січній CA). Аналогічно $\angle CAL = 83^\circ$, $\angle BAN = 62^\circ$, $\angle K = 180^\circ - 83^\circ - 62^\circ = 35^\circ$, $\angle M = 180^\circ - 35^\circ - 62^\circ = 83^\circ$, $\angle L = 180^\circ - 35^\circ - 83^\circ = 62^\circ$.

391. Існує, наприклад прямокутний трикутник з кутами 90° , 60° , 30° , у якому $30^\circ = 90^\circ - 60^\circ$.

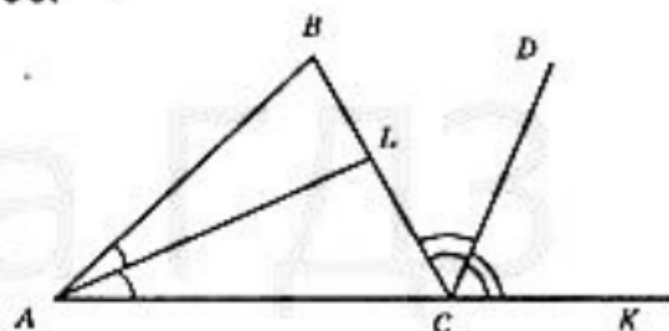
392.



$\angle 1 = 180^\circ - \angle A$, $\angle 2 = 180^\circ - \angle A$, $\angle 3 = 180^\circ - \angle B$, $\angle 4 = 180^\circ - \angle B$, $\angle 5 = 180^\circ - \angle C$, $\angle 6 = 180^\circ - \angle C$.

Додамо почленно всі шість рівностей, матимемо: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180^\circ \cdot 6 = 1080^\circ$.

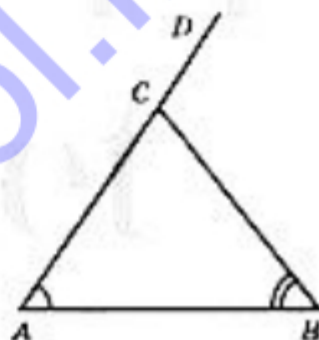
393.



Оскільки зовнішній кут більший від кута трикутника, не суміжного з ним, то $\angle BAC \neq \angle BCK$ і тоді половини цих кутів теж нерівні, тобто $\angle LAC \neq \angle DCK$. Оскільки $\angle LAC$ і $\angle DCK$ — відповідні кути при прямих AL і DC і січній AC і вони нерівні, то прями AL і DC не паралельні.

Застосуйте на практиці

394.



Побудуємо зовнішній кут трикутника, не суміжний з тими кутами, суму яких треба знайти $\angle DCB = \angle A + \angle B$.

395. Оскільки в $\triangle ABC$ $\angle C = 45^\circ$, $\angle B = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, тобто $\triangle ABC$ — рівнобедрений, то $AB = AC$.

396. Оскільки в $\triangle ABC$ $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, тобто $\triangle ABC$ — рівнобедрений, то $AC = AB$.

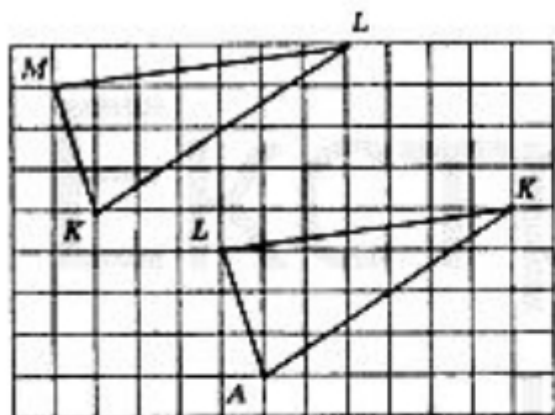
§ 12. Рівність геометричних фігур

397. Щоб сумістити фігури F_1 і F , можна скопіювати фігуру F на кальку, потім перевернути кальку і покласти на фігуру F .

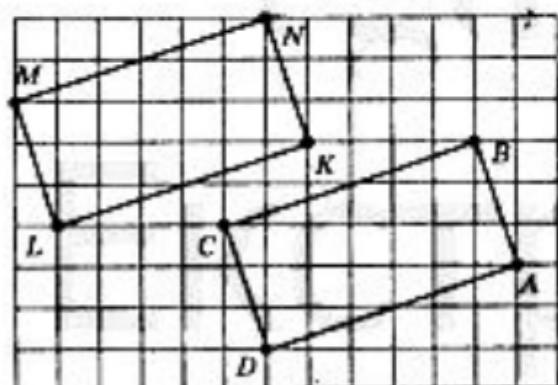
398. Відрізки OP і MN сумістити не можна, бо вони мають різну довжину.

401. $AB = AC$.

402.



403.



- 1) Відрізки AO і OB можна сумістити, бо вони мають рівні довжини.
- 2) Відрізки AO і AB не можна сумістити, бо вони мають різні довжини.
- 3) Відрізки AB і OB не можна сумістити, бо вони мають різні довжини.

405.



- 1) Кути $\angle AOC$ і $\angle COB$ можна сумістити, бо вони мають рівні градусні міри.
- 2) Кути $\angle AOC$ і $\angle AOB$ не можна сумістити, бо вони мають різні градусні міри.
- 3) Кути $\angle AOB$ і $\angle COB$ не можна сумістити, бо вони мають різні градусні міри.

406. 1) Можна, бо $AB = CD$, $3,4 \text{ см} = 3,4 \text{ см}$.

2) Не можна, бо $AB \neq CD$, $5 \text{ см} \neq 6 \text{ см}$.

3) Не можна, бо $AB \neq CD$, $15 \text{ см} \neq 15 \text{ мм}$.

408. Так, квадрати сумістяться, бо $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CD = C_1D_1$, $AD = A_1D_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

409. 1) Так; 2) так; 3) так, бо вони рівні; 4) не завжди, можна сумістити, якщо вони рівні.

410. Так, кола сумістяться.

411. 1) Точки C і C_1 не сумістяться, бо $AC \neq A_1C_1$. 2) Точки D і D_1 не сумістяться, бо $AD \neq A_1D_1$. 3) Відрізки EF і E_1F_1 сумістяться, бо $EF = E_1F_1$.

412. 1) Ні; 2) ні; 3) ні.

413. 1) $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$; 2) $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

414. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

1) $A_1B_1 = AB = 6 \text{ см}$, $B_1C_1 = BC = 7 \text{ см}$, $A_1C_1 = AC = 8 \text{ см}$;

2) $\angle A = \angle A_1 = 65^\circ$, $\angle B = \angle B_1 = 80^\circ$, $\angle C = \angle C_1 = 35^\circ$.

415. 1) Оскільки $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, то $\angle A_1 = \angle A = 42^\circ$, $\angle B_1 = \angle B = 80^\circ$, $\angle C_1 = \angle C = 180^\circ - 42^\circ - 80^\circ = 58^\circ$.

2) Оскільки $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, то $\angle B_1 = \angle B = 65^\circ$, $\angle C_1 = \angle C = 45^\circ$, $\angle A_1 = \angle A = 180^\circ - 65^\circ - 45^\circ = 70^\circ$.

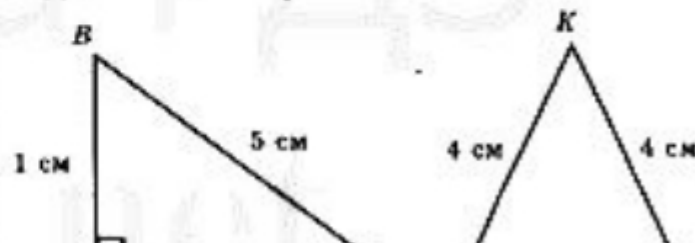
416. 1) Оскільки $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, то $P_{\triangle ABC} = A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1 = AB + BC + AC = 7 \text{ см} + 9 \text{ см} + 11 \text{ см} = 27 \text{ см}$.

2) Оскільки $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, то $P_{\triangle A_1B_1C_1} = A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1 = AB + BC + AC = 14 \text{ см} + 15 \text{ см} + 17 \text{ см} = 46 \text{ см}$.

3) Оскільки $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, то $P_{\triangle A_1B_1C_1} = A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1 = AB + BC + AC = 1,3 \text{ дм} + 2,1 \text{ дм} + 2,0 \text{ см} = 1,3 \text{ дм} + 2,1 \text{ дм} + 2 \text{ мм} = 5,4 \text{ дм}$.

Відповідь: 1) 27 см; 2) 46 см; 3) 5,4 дм.

417.



$$P_{ABC} = 3 \text{ см} + 5 \text{ см} + 4 \text{ см} = 12 \text{ см}.$$

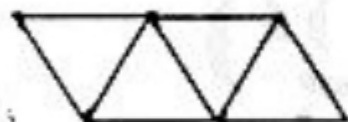
$$P_{MKL} = 4 \text{ см} + 4 \text{ см} + 4 \text{ см} = 12 \text{ см}.$$

$$P_{ABC} = P_{MKL}, \text{ але } \triangle ABC \neq \triangle MKL.$$

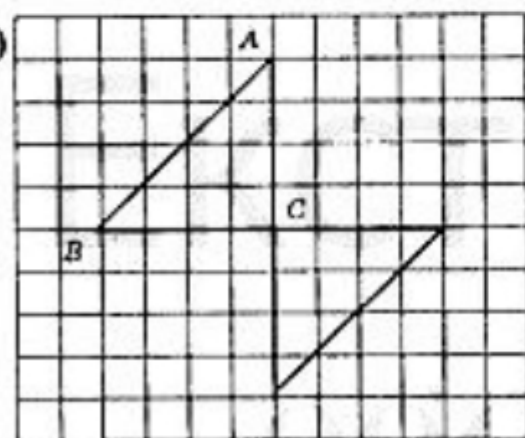
418. 1) $A_1B_1 = 11 \text{ см}, AC = 16 \text{ см}, B_1C_1 = 14 \text{ см};$ 2) $\angle B_1 = 60^\circ, \angle A = 60^\circ, \angle C = 70^\circ.$

419. $AB = A_1B_1 = A_2B_2 = 4,2 \text{ см}, BC = B_1C_1 = B_2C_2 = 2 \text{ см}, A_1C_1 = A_2C_2 = AC = 6,3 \text{ см}, \angle A_1 = \angle A_2 = \angle A = 20^\circ, \angle B = \angle B_2 = \angle B_1 = 115^\circ, \angle C = \angle C_1 = \angle C_2 = 45^\circ.$

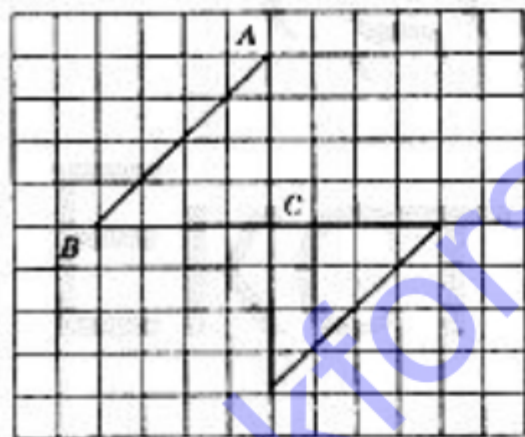
420.



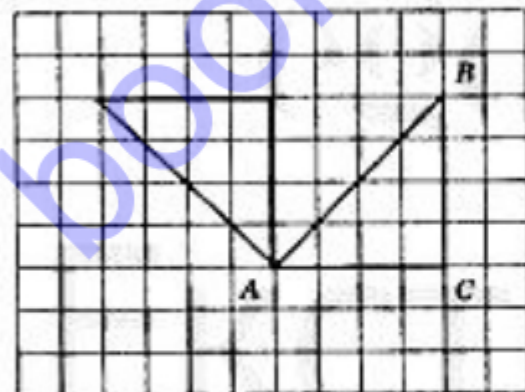
421. 1)



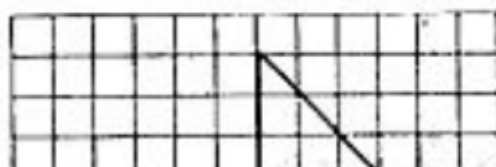
2)



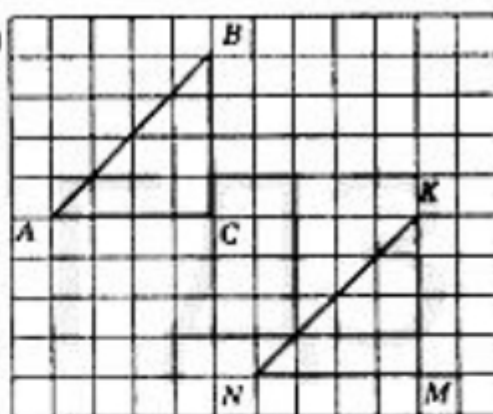
3)



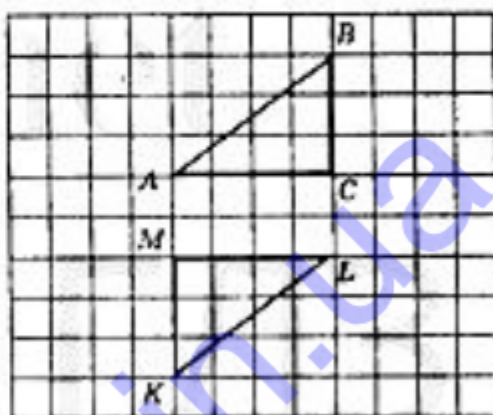
4)



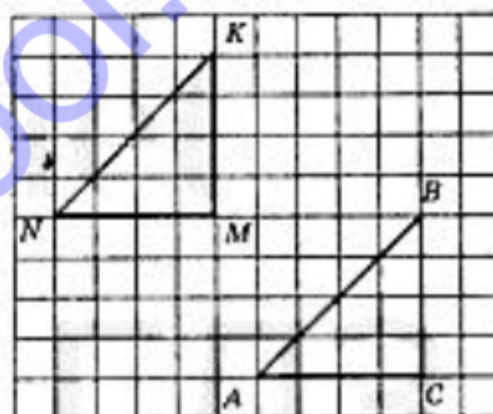
422. 1)



2)

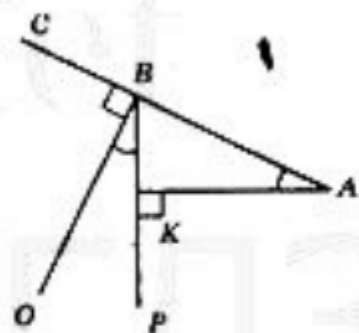


3)



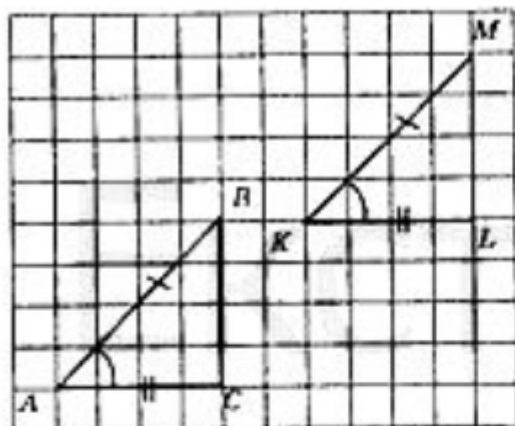
Застосуйте на практиці

423.



Оскільки $OB \perp AC$, $BP \perp AK$, то $\angle OBP = \angle BAK$.

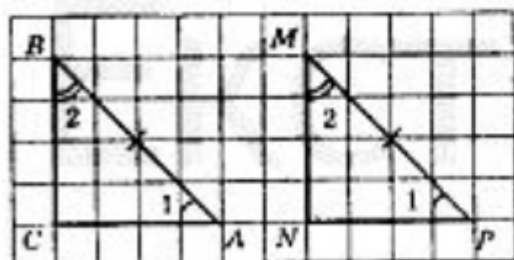
424. $KL = AB$, $ML = CB$, $\angle L = \angle B$. Отже, $\triangle KLM \cong \triangle ABC$ за трьома елементами.



427. Оскільки $DE = AB$, $\angle D = \angle A$, $\angle E = \angle B$, то $\triangle DEF = \triangle ABC$ за другою ознакою рівності трикутників.

428. $LE = LB$, $LD = LA$, $ED \neq BA$. Отже, $\triangle EFD \neq \triangle BCA$.

429.



$\triangle ABC = \triangle PMN$.

430. Мал. 250. $\triangle ABD = \triangle CBD$ за першою ознакою рівності трикутників, оскільки $AD = CD$, $\angle BDA = \angle BDC$, BD — спільна сторона.

Мал. 252. $\triangle ABD = \triangle CBD$ за першою ознакою рівності трикутників, оскільки $AB = CB$, $\angle ABD = \angle CBD$, BD — спільна сторона.

Мал. 252. $\triangle ABO = \triangle CDO$ за першою ознакою рівності трикутників, оскільки $BO = CO$, $AO = DO$, $\angle BOA = \angle COD$ — як вертикальні кути.

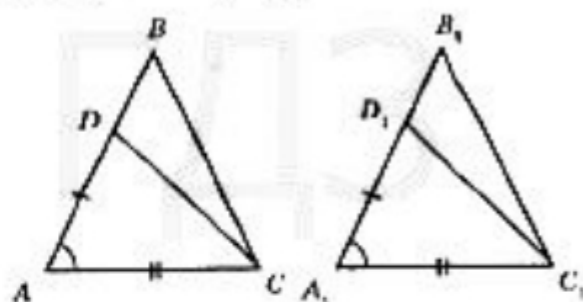
431. Оскільки $\angle A = \angle E$, $AB = EF$, $AC = DE$, то $\triangle ABC = \triangle EFD$ за першою ознакою рівності трикутників, тоді $\angle B = \angle F$.

432.

$\triangle ABC$	$AB = 15$ см, $BC = 16$ см, $\angle B = 120^\circ$	$AB = 16$ см, $AC = 19$ см, $\angle A = 13^\circ$
$\triangle KLM$	$KL = 5$ см, $LM = 16$ см, $\angle L = 120^\circ$	$KL = 16$ см, $KM = 19$ см, $\angle K = 13^\circ$

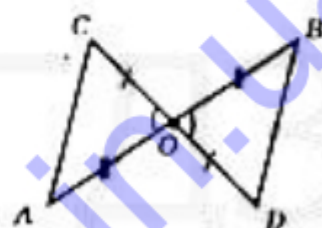
433. $AC = KL$, $CB = LM$, $\angle C = \angle L$, то $\triangle ACB = \triangle KLM$ за першою ознакою рівності трикутників, тоді $KM = AB = 7$.

434.

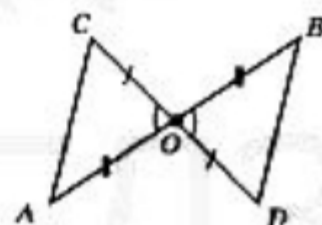


Оскільки $AD = A_1D_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, то $\triangle ADC = \triangle A_1D_1C_1$ за першою ознакою рівності трикутників.

435.



1) Оскільки $CO = DO$, $AO = BO$, $\angle AOC = \angle BOD$ — як вертикальні кути, то $\triangle AOC = \triangle BOD$ за першою ознакою рівності трикутників.



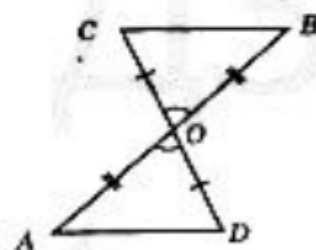
2) Оскільки $AO = BO$, $CO = DO$, $\angle BOC = \angle AOD$ то $\triangle BOC = \triangle AOD$ за першою ознакою рівності трикутників.

436. Оскільки BD — бісектриса $\angle ABC$, то $\angle CBD = \angle ABD$.

$\triangle ABD = \triangle CBD$ за першою ознакою рівності трикутників, оскільки $AB = BC$, BD — спільна сторона. $\angle CBD = \angle ABD$. Із рівності трикутників маємо:

1) $AD = CD$; 2) $\angle BCD = \angle BAD = 130^\circ$.

437.



Із рівності трикутників маємо:

1) $BC = AD = 5$ см; 2) $\angle ABC = \angle BAD = 65^\circ$.

438. Мал. 255. Оскільки $\angle ABD = \angle CBD$, $\angle ADB = \angle CDB$, BD — спільна сторона, то $\triangle BAD = \triangle BCD$ за другою ознакою рівності трикутників.

Мал. 256. Оскільки $\angle BAD = \angle CDA$ — як сума двох рівних кутів, $\angle CAD = \angle BDA$, AD — спільна сторона, то $\triangle ABD = \triangle DCA$ за другою ознакою рівності трикутників.

Мал. 257. Оскільки $AO = CO$, $\angle A = \angle C$, $\angle BOA = \angle DOC$ — як вертикальні кути, то $\triangle ABO = \triangle CDO$ за другою ознакою рівності трикутників.

439. Оскільки $AB = EF$, $\angle A = \angle E$, $\angle B = \angle F$, то $\triangle ABC = \triangle EFD$ за другою ознакою рівності трикутників, тоді $\angle D = \angle C$.

440.

$\triangle ABC$	$AB = 7$ см, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 41^\circ$	$AC = 13$ см, $\angle A = 27^\circ 48'$, $\angle C = 92^\circ$
$\triangle DEF$	$DE = 7$ см, $\angle D = 60^\circ$, $\angle E = 41^\circ$	$DF = 13$ см, $\angle D = 27^\circ 48'$, $\angle F = 92^\circ$
$\triangle PMN$	$PM = 7$ см, $\angle P = 60^\circ$, $\angle M = 41^\circ$	$PN = 13$ см, $\angle P = 27^\circ 48'$, $\angle N = 92^\circ$

441. На мал. 258. Оскільки $AB = EF$, $\angle A = \angle E$, $\angle B = \angle F$, то $\triangle ABC = \triangle EFD$ за другою ознакою рівності трикутників. Із рівності трикутників випливає, що $\angle D = \angle C = 40^\circ$.

На мал. 259. Оскільки $AB = QR$, $\angle A = \angle Q$, $\angle B = \angle R$, то $\triangle ABC = \triangle QRP$ за другою ознакою рівності трикутників, тоді $QP = AC = 12$ см.

442. Оскільки $AB = DP$, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle P$, то $\triangle ABC = \triangle DPM$ за другою ознакою рівності трикутників. Із рівності трикутників маємо:

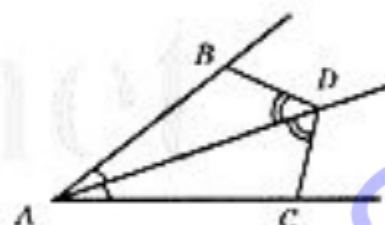
1) $AB = DP = 6,2$ см; 2) $\angle D = \angle A = 54^\circ$;
3) $\angle B = \angle P = 46^\circ 39'$; 4) $PM = BC = 85$ мм.

443.

Оскільки $AO = OC$, $\angle OCB = \angle OAD$ і $\angle BOC = \angle DOA$ — як вертикальні кути, то $\triangle COB = \triangle AOD$ за другою ознакою рівності трикутників.

444. Оскільки $\angle AOB = \angle ADC$, AD — спільна сторона, $\angle BAD = \angle CAD$, бо AD — бісектриса кута CAB , то $\triangle ABD = \triangle ACD$ за другою ознакою рівності трикутників.

445.



Оскільки $\angle BDA = \angle CDA$, $\angle BAD = \angle CAD$, бо AD — бісектриса кута A , AD — спільна сторона, то $\triangle ABD = \triangle ACD$ за другою ознакою рівності трикутників.

446. Оскільки $AO = CO$, $BO = DO$, $\angle AOB = \angle COD$ як вертикальні кути, то $\triangle AOB = \triangle COD$ за першою ознакою рівності трикутників.

Із рівності трикутників маємо $\angle ABO = \angle CDO$, а ці кути є внутрішніми різносторонніми при прямих AB і CD і січній BD . Отже, $AB \parallel CD$.

447. Оскільки $BC = AD$, $\angle DAC = \angle ACB$, AC — спільна, то $\triangle ABC = \triangle CDA$ за першою ознакою рівності трикутників. Із рівності трикутників маємо: $\angle BAC = \angle DCA$, які є внутрішніми різносторонніми при прямих AB і CD і січній AC , отже, $AB \parallel DC$.

448. Оскільки $BC \parallel AD$, то $\angle DAC = \angle BCA$ — як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих BC і AD і січній AC .

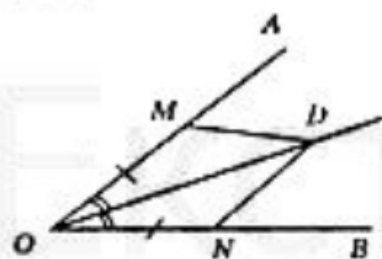
$\triangle ABC = \triangle ADC$ за першою ознакою рівності трикутників, оскільки $BC = AD$, $\angle DAC = \angle BCA$, AC — спільна сторона.

449.



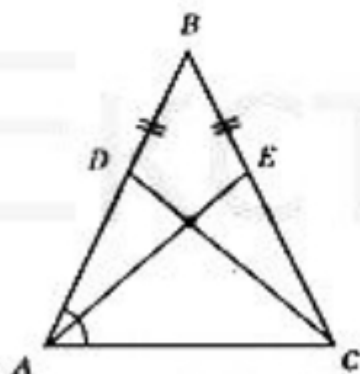
Із рівності трикутників випливає, що $\angle ABC = \angle ADC$.

450.



Оскільки $OM = ON$, то $\angle MOD = \angle NOD$ (бо OD — бісектриса кута A), OD — спільна сторона, то $\triangle MOD = \triangle NOD$ за першою ознакою рівності трикутників. Із рівності трикутників випливає, що $DM = DN$.

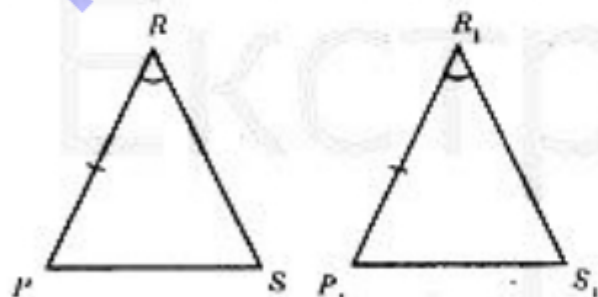
451.



Розглянемо $\triangle ABE$ і $\triangle CBD$. $BE = BD$, $BC = BA$ — як бічні сторони рівнобедреного трикутника, $\angle DBE$ — спільний. Отже, $\triangle ABE = \triangle CBD$ за першою ознакою рівності трикутників. Із рівності трикутників випливає: 1) $AE = CD$; 2) $\angle AEC = \angle ADC$ — як суміжні кути до рівних кутів $\angle AEB$ і $\angle BDC$.

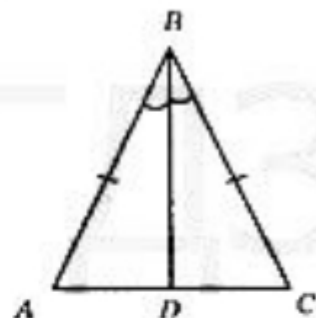
452. Розглянемо трикутники OAD і OCD . У них $OA = OC$, $OD = OD$, $\angle O$ — спільний. $\triangle OAD = \triangle OCD$ за першою ознакою рівності трикутників. Із рівності трикутників маємо: 1) $AD = CD$; 2) $\angle OAD = \angle OCD$, тоді $\angle DAB = \angle DCB$ — як суміжні до рівних кутів $\angle OAD$ і $\angle OCD$.

453.



$RS = R_1S_1$) за першою ознакою рівності трикутників.

454.



Нехай BD — бісектриса рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$).

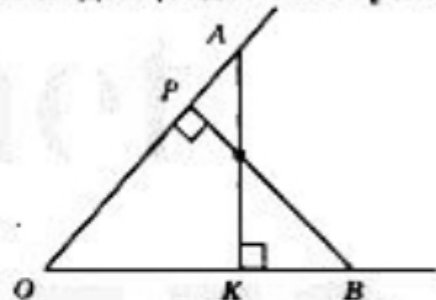
Оскільки $AB = BC$, $\angle ABD = \angle CBD$ (оскільки BD — бісектриса кута B), BD — спільна сторона, то $\triangle ABD = \triangle CBD$. Із рівності трикутників випливає, що $AD = DC$, тобто BD — є медіаною трикутника ABC .

455. Оскільки $BO = OD$, $\angle BAO = \angle DCO$ (як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих AB і DC та січною AC), $\angle ABO = \angle CDO$ (як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих AB і DC і січною BD), то $\triangle AOB = \triangle COD$ за другою ознакою рівності трикутників.

456. Оскільки $AO = OC$ і $\angle OAB = \angle OCD$ — за умовою, $\angle AOB = \angle DOC$ — як вертикальні кути, то $\triangle AOB = \triangle COD$ за другою ознакою рівності трикутників. Із рівності трикутників маємо:

1) $AB = CD = 10$ см; 2) $OB = OD = 3$ см, $BD = BO + OD = 3$ см + 3 см = 6 см.

547. І випадок (задано гострий кут)



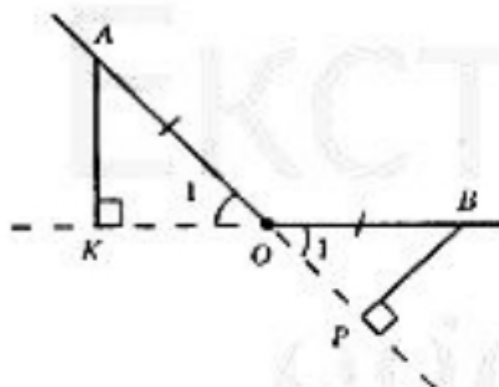
$OA = OB$ — за умовою, $AK \perp OB$, $BP \perp OA$, тобто $\angle AKO = \angle BPO = 90^\circ$, $\angle O$ — спільний. Отже, $\triangle OAK = \triangle OBP$ за другою ознакою рівності трикутників. Із рівності трикутників маємо: $AK = BP$.

II випадок (задано прямий кут)



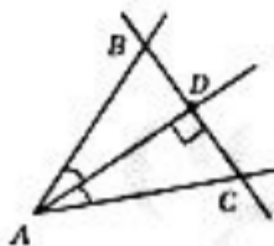
Оскільки $\angle AOB = 90^\circ$, то $AO \perp BO$,
 $AO = BO$, то перпендикуляри рівні.

III випадок (задано тупий кут)



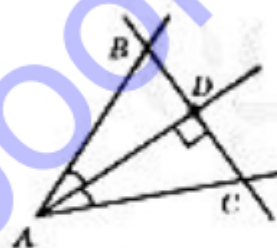
Розглянемо $\triangle OAK$ і $\triangle OBP$. У них $AO = BO$ — за умовою, $\angle AOK = \angle BOP$ (як вертикальні кути), $\angle KAO = \angle PBO$ (бо кожен з них дорівнює $90^\circ - \angle 1$), отже, $\triangle OAK = \triangle OBP$ за другою ознакою рівності трикутників. Із рівності трикутників маємо: $AK = BP$.

458.



Нехай AD — бісектриса кута A , $AD \perp BC$. Розглянемо $\triangle ABD$ і $\triangle ADC$. $\angle BAD = \angle CAD$, оскільки AD — бісектриса кута A , $\angle ADB = 90^\circ$, $\angle ADC = 90^\circ$. AD — спільна сторона. Отже, $\triangle ABD = \triangle ADC$ за другою ознакою рівності трикутників. Із рівності трикутників $AB = AC$, тобто $\triangle ABC$ — рівнобедрений.

459.



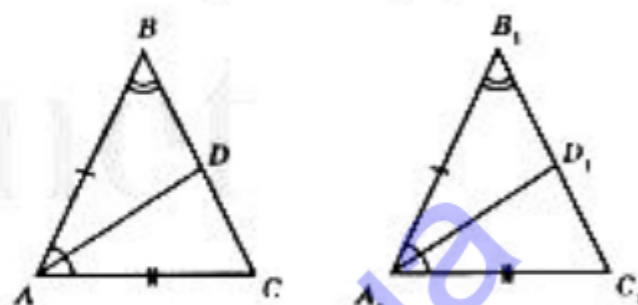
Нехай AD — бісектриса кута A і $AD \perp BC$. $\triangle ABD = \triangle ADC$, оскільки $\angle BAD = \angle CAD$ (бо AD — бісектриса кута A), $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$ (бо $AD \perp BC$). Із рівності трикутників маємо: $AB = AC$.

460.



$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за першою ознакою рівності трикутників (оскільки $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$ за умовою). Із рівності трикутників маємо, що $\angle A = \angle A_1$. Розглянемо $\triangle ABD$ і $\triangle A_1B_1D_1$: $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, $\angle ABD = \angle A_1B_1D_1$ — як різниця рівних кутів. Отже, $\triangle ABD = \triangle A_1B_1D_1$ за другою ознакою рівності трикутників.

461.

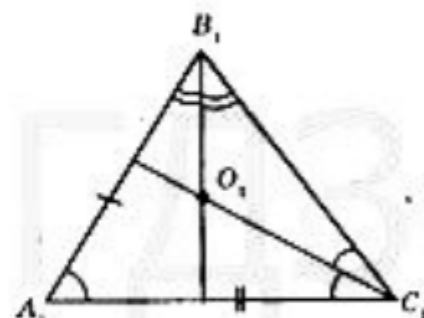
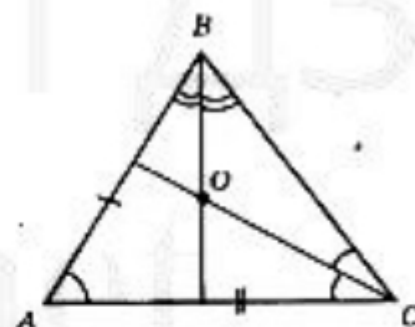


$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за другою ознакою рівності трикутників (оскільки $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$). Із рівності трикутників маємо: $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$.

1) $\triangle ACD = \triangle A_1C_1D_1$ за першою ознакою рівності трикутників, оскільки $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$, $CD = C_1D_1$ (як половини рівних сторін BC і B_1C_1).

2) $\triangle ABD = \triangle A_1B_1D_1$ за першою ознакою рівності трикутників, оскільки $AB = A_1B_1$, $\angle B = \angle B_1$, $BD = B_1D_1$ (як половини рівних сторін BC і B_1C_1).

462.

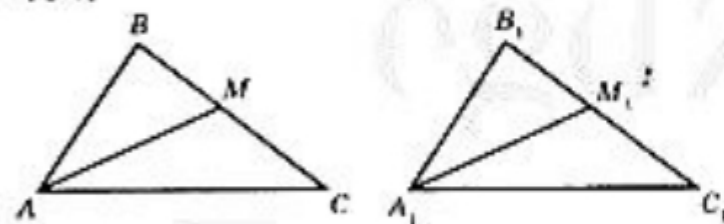


$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за першою ознакою рівності трикутників. Із рівності трикутників

$\triangle BOC = \triangle B_1O_1C_1$ за другою ознакою рівності трикутників.

463. За умовою $OA = OC$, $OD = OB$, $\angle O$ — спільний. Тоді $\triangle AOD = \triangle COB$. Отже, $\angle OAD = \angle OCB$, $\angle ADO = \angle CBO$, $CD = OD - OC$, $AB = OB - OA$ і $AB = CD$, $\angle BAM = \angle DCM$ як суміжні до рівних кутів $\angle OAD$ і $\angle OCB$. Тоді $\triangle ABM = \triangle CDM$ за другою ознакою рівності трикутників.

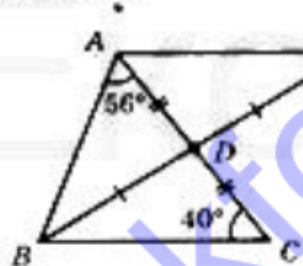
464.



Нехай $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, $AM = A_1M_1$. Оскільки $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, то $AB = A_1B_1$, $\angle B = \angle B_1$, $BC = B_1C_1$.

Розглянемо $\triangle ABM$ і $\triangle A_1B_1M_1$. У них $AB = A_1B_1$, $\angle B = \angle B_1$, $BM = B_1M_1$ — як половини рівних сторін BC і B_1C_1 . Отже, $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$ за першою ознакою рівності трикутників. З рівності трикутників маємо: $AM = A_1M_1$, тобто у рівних трикутників медіани, проведені до рівних сторін, рівні.

465.

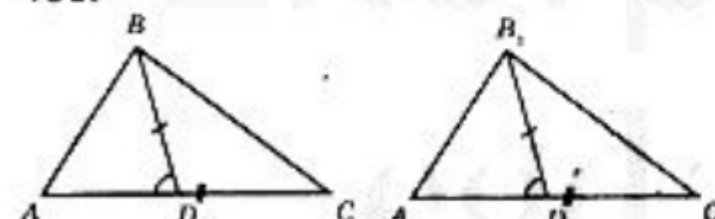


Оскільки BD — медіана, то $AD = CD$, $DE = BD$ за побудовою.

Отже, $\triangle ADE = \triangle CDB$ за другою ознакою. Із рівності трикутників маємо: $\angle DAE = \angle DCB = 40^\circ$. Тоді $\angle BAE = \angle BAD + \angle DAE = 56^\circ + 40^\circ = 95^\circ$.

Відповідь: 96° .

466.



$\triangle ADB = \triangle A_1D_1B_1$ за першою ознакою рівності трикутників, оскільки $AD = A_1D_1$ — як половини рівних сторін, $BD = B_1D_1$ — за умовою, $\angle ADB = \angle A_1D_1B_1$.

З рівності трикутників маємо: $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$.

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за першою ознакою рівності трикутників, оскільки $AC = A_1C_1$ за умовою, $AB = A_1B_1$ за доведеним, $\angle A = \angle A_1$ за доведеним.

467.



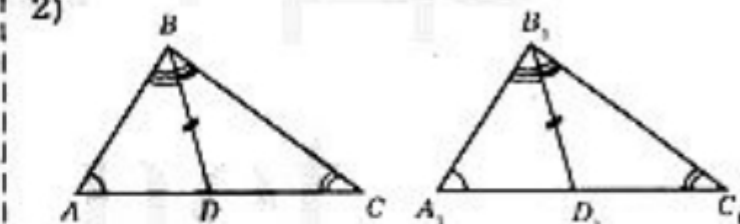
Нехай $\angle A = \angle A_1$, $AL = A_1L_1$, $\angle ALB = \angle A_1L_1B_1$.

Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

$\triangle ALB = \triangle A_1L_1B_1$ за другою ознакою рівності трикутників, оскільки $AL = A_1L_1$ — за умовою, $\angle ALB = \angle A_1L_1B_1$ — за умовою, $\angle LAB = \angle L_1A_1B_1$ — як половини рівних кутів. З рівності трикутників маємо: $AB = A_1B_1$, $LB = L_1B_1$.

Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$: $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Отже, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за другою ознакою рівності трикутників.

2)



Нехай $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$, BD та B_1D_1 — бісектриси, $BD = B_1D_1$.

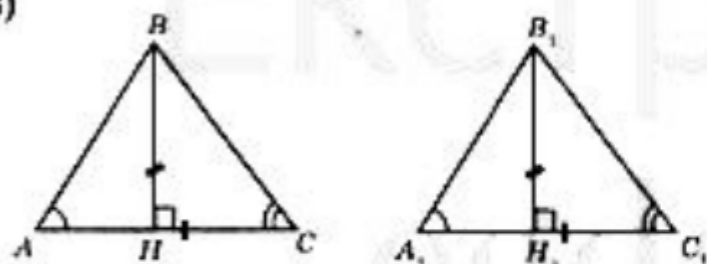
Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

За теоремою про суму кутів трикутника $\angle A + \angle C + \angle B = 180^\circ$, $\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C)$, $\angle B_1 = 180^\circ - (\angle A_1 + \angle C_1)$, отже, $\angle B = \angle B_1$.

Оскільки $\angle A = \angle A_1$ за умовою, $\angle ABD = \angle A_1B_1D_1$ — як половини рівних кутів $\angle B$ і $\angle B_1$, то $\angle ADB = \angle A_1D_1B_1$.

Із рівності трикутників випливає, що $AB = A_1B_1$. Тоді $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за другою ознакою рівності трикутників, оскільки $AB = A_1B_1$ — за доведеним, $\angle A = \angle A_1$ — за умовою, $\angle B = \angle B_1$ — за доведеним.

3)



Нехай $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$, BH та B_1H_1 — висоти, $BH = B_1H_1$.

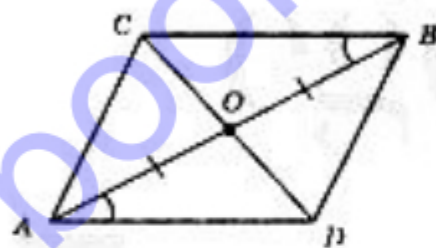
Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

$\triangle ABH = \triangle A_1B_1H_1$, оскільки у них $\angle AHB = \angle A_1H_1B_1 = 90^\circ$, $BH = B_1H_1$, $\angle ABH = \angle A_1B_1H_1$ (оскільки $\angle ABH = 90^\circ - \angle A$, $\angle A_1B_1H_1 = 90^\circ - \angle A_1$). Із рівності трикутників маємо $AB = A_1B_1$, $\angle ABH = \angle A_1B_1H_1$. $\triangle CBH = \triangle C_1B_1H_1$, оскільки $\angle BHC = \angle B_1H_1C_1 = 90^\circ$, $BH = B_1H_1$, $\angle CBH = \angle C_1B_1H_1$ (оскільки $\angle CBH = 90^\circ - \angle C$, $\angle C_1B_1H_1 = 90^\circ - \angle C_1$).

Із рівності трикутників маємо: $BC = B_1C_1$, $\angle CBH = \angle C_1B_1H_1$.

Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$. У них $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ (як суми рівних кутів $\angle ABH = \angle A_1B_1H_1$, $\angle CBH = \angle C_1B_1H_1$). Отже, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

468.

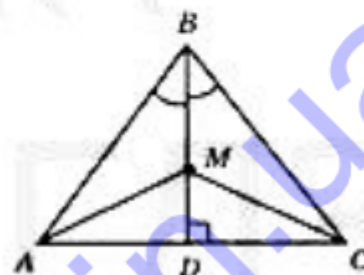


$\triangle CBO = \triangle DAO$ за другою ознакою рівності трикутників, оскільки $AO = BO$ (за умовою), $\angle CBO = \angle DAO$ (за умовою), $\angle COB = \angle DOA$ — як вертикальні кути. Із рівності трикутників маємо: $CO = DO$.

469. $\triangle AOB = \triangle DOC$ за першою ознакою рівності трикутників, оскільки $AO = OD$, $BO = OC$, $\angle AOB = \angle DOC$ — як вертикальні кути. Із рівності цих трикутників випливає, що $\angle A = \angle D$.

Розглянемо $\triangle AMO$ і $\triangle DNO$: $AO = OD$ — за умовою, $\angle A = \angle D$ — за доведеним, $\angle AOM = \angle DON$ — як вертикальні кути. Отже, $\triangle AMO = \triangle DON$ за другою ознакою рівності трикутників. Із рівності цих трикутників випливає, що $MO = ON$.

470.



$\triangle ABD = \triangle CBD$ за другою ознакою рівності трикутників, оскільки BD — спільна сторона, $\angle ADB = \angle CDB = 90^\circ$ (бо BD — висота), $\angle ABD = \angle CBD$ — за умовою. Із рівності трикутників випливає, що $AD = DC$.

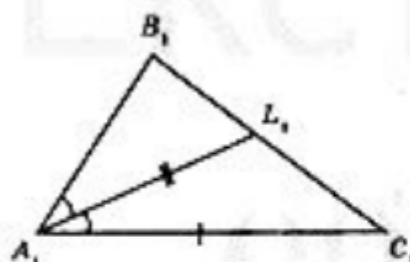
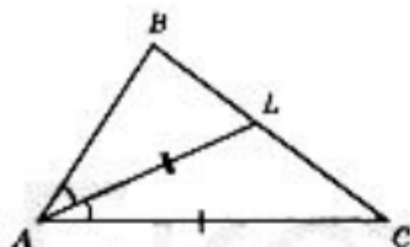
Розглянемо $\triangle AMD$ і $\triangle CMD$: $AD = DC$, $\angle ADM = \angle CDM = 90^\circ$, MD — спільна сторона. Отже, $\triangle AMD = \triangle CMD$ за першою ознакою рівності трикутників. Із рівності трикутників випливає, що $AM = CM$.

471. $\triangle OAD = \triangle OCB$ за першою ознакою рівності трикутників, оскільки $\angle O$ — спільний, $OA = OC$ — за умовою, $OD = OB$ (як суми рівних відрізків). Із рівності трикутників випливає, що $\angle ODA = \angle OBC$.

$\triangle CDM = \triangle ABM$ за другою ознакою рівності трикутників, оскільки $\angle ODA = \angle OBC$ — за доведеним, $CD = AB$ — за умовою, $\angle CMD = \angle AMB$ — як вертикальні, тоді $\angle MCD = \angle MAB$. Із рівності трикутників маємо: $DM = BM$.

Розглянемо трикутники ODM і OBM : $DM = BM$ — за умовою, $\angle CDM = \angle ABM$ —

472.



Нехай $\angle A = \angle A_1$, $AL = A_1L_1$, $AC = A_1C_1$.

Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

$\triangle ALC = \triangle A_1L_1C_1$ — за першою ознакою рівності трикутників, оскільки $AL = A_1L_1$ — за умовою, $AC = A_1C_1$ — за умовою, $\angle LAC = \angle L_1A_1C_1$ — як половини рівних кутів. З рівності трикутників маємо: $\angle C = \angle C_1$.

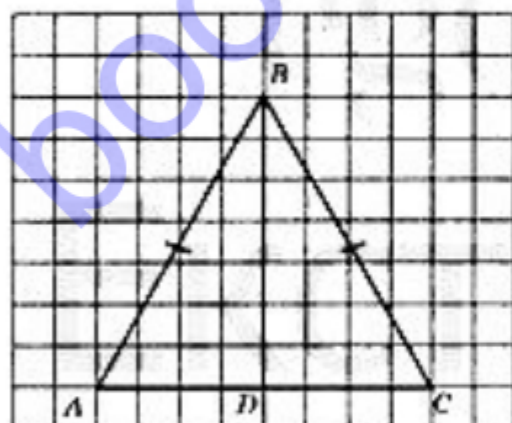
Розглянемо $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$: $AC = A_1C_1$ — за умовою, $\angle A = \angle A_1$ — за умовою, $\angle C = \angle C_1$ — за доведеним. Отже, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ — за другою ознакою рівності трикутників.

§ 14. Властивості й ознака рівнобедреного трикутника

476. На мал. 72: ML і MK — бічні сторони, KL — основа, $\angle K = \angle L$.

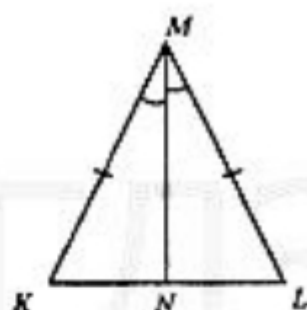
477. $KD = DF$, $KE = EF$, $\angle K = \angle F$, $\angle KDE = \angle FDE$, $\angle DEK = \angle DEF = 90^\circ$.

478:



Щоб провести бісектрису, медіану і висоту до основи трикутника, досить поділити основу навпіл і з'єднати середину

480.



Оскільки бісектриса MN є медіаною, то

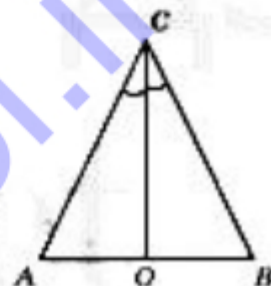
$$KN = NL. \text{ Отже: } KN = NL = \frac{KL}{2}.$$

$$1) KN = NL = \frac{6 \text{ см}}{2} = 3 \text{ см};$$

$$2) KN = NL = \frac{7 \text{ см}}{2} = 3,5 \text{ см};$$

$$3) KN = NL = \frac{8 \text{ см}}{2} = 4 \text{ см}.$$

481.

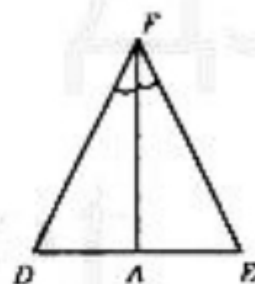


Бісектриса CO є медіаною, тому $AB = 2AO = 2BO$.

$$1) AB = 2AO = 2 \times 0,7 \text{ дм} = 1,4 \text{ дм};$$

$$2) AB = 2BO = 2 \times 25 \text{ мм} = 50 \text{ мм}.$$

482.

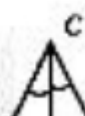


1) Якщо $DF = DE + FE$, то FA не є медіаною.

2) Якщо $EF = ED \neq DF$, то FA не є медіаною.

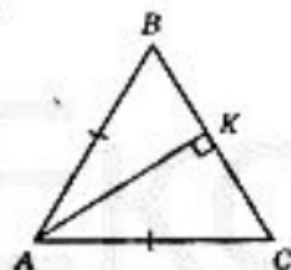
3) Якщо $FD = FE \neq DE$, то FA не є медіаною, згідно з властивістю рівнобедреного трикутника.

483. 1)



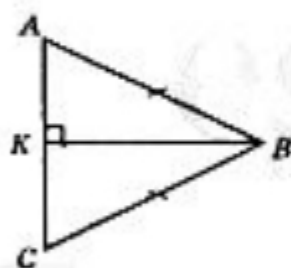
$$\angle CKA = \angle CKB = 90^\circ;$$

2)



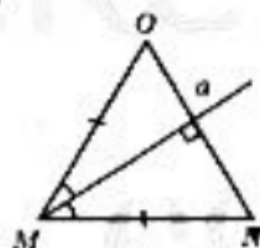
$$\angle AKB = \angle AKC = 90^\circ;$$

3)

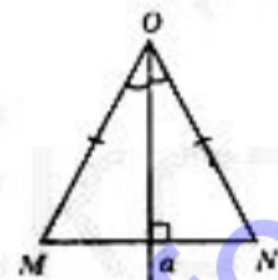


$$\angle BKA = \angle BKC = 90^\circ.$$

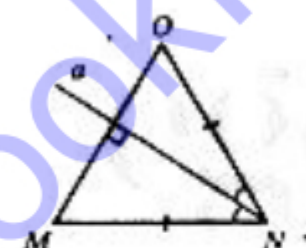
484. 1) $a \perp ON$



2) $a \perp MN$



3) $a \perp OM$



485. Мал. 276. $\angle C = \angle B = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$, $\angle A = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$.

Мал. 277, $\angle BAC = 75^\circ$ — як вертикальні кути. $\angle C = \angle A = 75^\circ$, $\angle B = 180^\circ - 2 \times 75^\circ = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.

486.



Якщо кут при основі дорівнює α , то кут при вершині дорівнює $180^\circ - 2\alpha$.

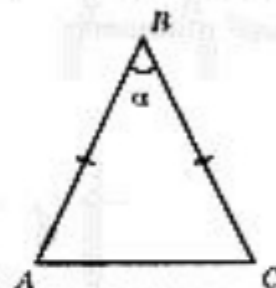
1) $180^\circ - 2 \times 40^\circ = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$;

2) $180^\circ - 2 \times 65^\circ = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$;

3) $180^\circ - 2 \times 80^\circ = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$.

Відповідь: 1) 100° ; 2) 50° ; 3) 20° .

487.



Якщо кут між бічними сторонами дорівнює α , то кути при основі дорівнюють

$$\frac{180^\circ - \alpha}{2}.$$

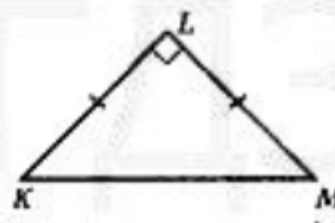
1) $\frac{180^\circ - 72^\circ}{2} = \frac{108^\circ}{2} = 54^\circ$;

2) $\frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$;

3) $\frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

Відповідь: 1) 54° і 54° ; 2) 45° і 45° ; 3) 30° і 30° .

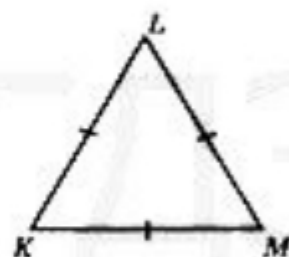
488.



Нехай у трикутнику KLM $\angle L = 90^\circ$, $KL = LM$, тоді $\angle K = \angle M = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$.

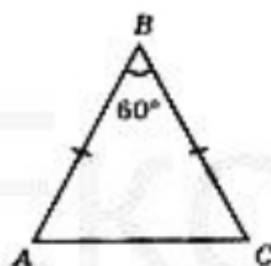
Відповідь: $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$.

489.



Оскільки в трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути, то в рівносторонньому трикутнику $\angle K = \angle L = \angle M$.

491. I випадок



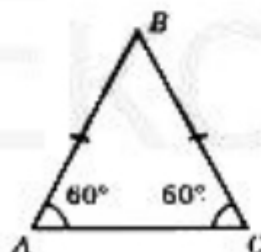
Нехай $\triangle ABC$ — рівнобедрений, $AB = BC$, $\angle B = 60^\circ$.

Доведемо, що $\triangle ABC$ — рівносторонній.

$$\angle A = \angle C = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ.$$

Оскільки в трикутнику всі кути дорівнюють 60° , то він рівносторонній.

II випадок



Нехай $\triangle ABC$ — рівнобедрений, $AB = BC$, $\angle A = 60^\circ$.

Доведемо, що $\triangle ABC$ — рівносторонній.

$\angle C = \angle A = 60^\circ$ за властивістю рівнобедреного трикутника, тоді $\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$. Оскільки в трикутнику всі кути дорівнюють 60° , то $\triangle ABC$ — рівносторонній.

492. 1)

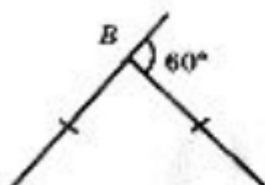


$\angle RSP = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$ (за властивістю суміжних кутів).

$\angle P = \angle RSP = 70^\circ$ (за властивістю рівнобедреного трикутника).

$\angle R = 180^\circ - 70^\circ - 70^\circ = 40^\circ$ (за властивістю зовнішнього кута).

2)



$\angle A = \angle C = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$ (за властивістю зовнішнього кута рівнобедреного трикутника).

Відповідь: 1) $70^\circ, 70^\circ, 40^\circ$; 2) $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$.

493. Кут при основі рівнобедреного трикутника може бути тільки гострим, оскільки трикутник не може мати два прямих або два тупих кути.

494. Зовнішній кут при основі рівнобедреного трикутника може бути тільки тупим.

495. Оскільки кут при основі рівнобедреного трикутника може бути тільки гострим, то за умовою задачі подано кути між бічними сторонами.

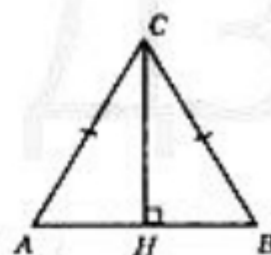
1) $\frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$;

2) $\frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$;

3) $\frac{180^\circ - 140^\circ}{2} = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$.

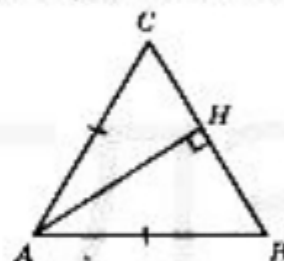
Відповідь: 1) $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$; 2) $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$; 3) $140^\circ, 20^\circ, 20^\circ$.

496. 1)



$AC = BC, AH = BH, \angle A = \angle B, \angle ACH = \angle BCH, \angle CHA = \angle CHB$.

2)



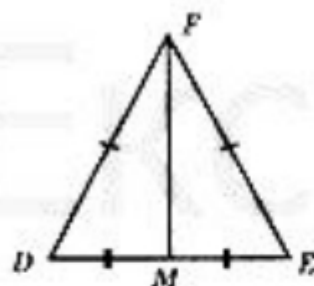
$AC = AB, CH = BH, \angle C = \angle B, \angle CAH = \angle BAH, \angle AHC = \angle AHB$.

3)



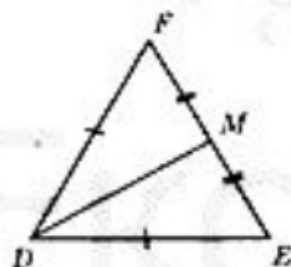
$AB = CB, CH = AH, \angle C = \angle A,$
 $\angle CBH = \angle ABH, \angle BHC = \angle BHA.$

497. 1)



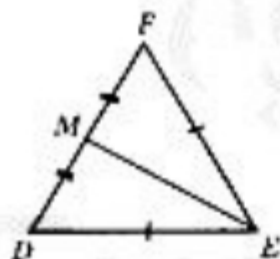
$DF = EF, DM = ME, \angle DFM = \angle EFM,$
 $\angle FMD = \angle EMF, \angle D = \angle E.$

2)



$DE = DF, FM = EM, \angle FDM = \angle EDM,$
 $\angle DMF = \angle DME, \angle F = \angle E.$

3)



$EF = ED, FM = DM, \angle FEM = \angle DEM,$
 $\angle EMF = \angle EMD, \angle F = \angle D.$

498. 1) Оскільки $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B =$
 $= 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ і $\angle C = \angle B$, то
 $\triangle ABC$ — рівнобедрений.

2) Оскільки $\angle A = 180^\circ - \angle C - \angle B = 180^\circ -$
 $- 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$ і $\angle A = \angle C$, то $\triangle ABC$ —
 рівнобедрений.

3) Оскільки $\angle B = 180^\circ - \angle C - \angle A =$
 $= 180^\circ - 50^\circ - 80^\circ = 50^\circ$ і $\angle B = \angle C$, то
 $\triangle ABC$ — рівнобедрений.

499. 1) І випадок. Якщо кут між бічними
 сторонами дорівнює 20° , то кути при
 основі дорівнюють $\frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = \frac{160^\circ}{2} =$

2) І випадок. Якщо кут між бічними сто-
 ронами дорівнює 40° , то кути при основі
 дорівнюють $\frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ.$

II випадок. Якщо кут при основі дорів-
 нює 40° , то кут між бічними сторонами
 дорівнює $180^\circ - 2 \times 40^\circ = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ.$

3) І випадок. Якщо кут між бічними сто-
 ронами дорівнює 80° , то кути при основі
 дорівнюють $\frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ.$

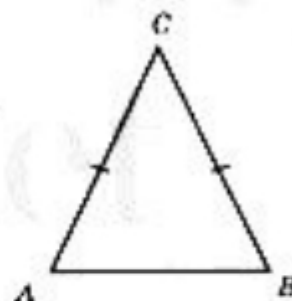
II випадок. Якщо кут при основі дорів-
 нює 80° , то кут між бічними сторонами
 дорівнює $180^\circ - 2 \times 80^\circ = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ.$
 Відповідь: 1) $20^\circ, 80^\circ, 80^\circ$ або $140^\circ, 20^\circ,$
 20° ; 2) $40^\circ, 70^\circ, 70^\circ$ або $100^\circ, 40^\circ, 40^\circ$;
 3) $80^\circ, 50^\circ, 50^\circ$ або $80^\circ, 80^\circ, 20^\circ.$

500. 1) Нехай градусна міра при осно-
 ві — x° , тоді $3x^\circ$ — градусна міра кута
 між бічними сторонами. Маємо рівнян-
 ня $x + x + 3x = 180^\circ$; $5x = 180^\circ$; $x = 36^\circ.$
 Отже, кут при основі 36° , кут між бічни-
 ми сторонами $108^\circ.$

2) Нехай градусна міра кута між бічними
 сторонами x° , тоді кут при основі — $2x^\circ.$
 Тоді $x + 2x + 2x = 180^\circ$; $5x = 180^\circ$; $x = 36^\circ.$
 Отже, кут між бічними сторонами дорів-
 нює 36° , кут при основі дорівнює $72^\circ.$

Відповідь: 1) $108^\circ, 36^\circ, 36^\circ$; 2) $36^\circ, 72^\circ,$
 $72^\circ.$

501.



$\angle C = x^\circ$, тоді $\angle A = \angle B = x^\circ + n^\circ$ і маємо
 рівняння: $x + (x + n) + (x + n) = 180^\circ$;
 $3x + 2n = 180^\circ$, звідси $x = \frac{180^\circ - 2n}{3}.$

1) Якщо $n = 30^\circ$, то

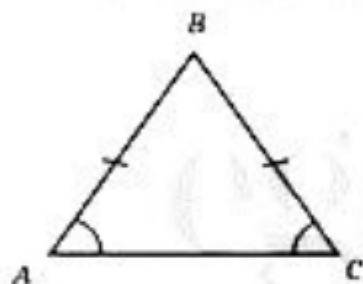
$x = \frac{180^\circ - 2 \cdot 30^\circ}{3} = \frac{180^\circ - 60^\circ}{3} = \frac{120^\circ}{3} = 40^\circ,$

$$x = \frac{180^\circ - 2 \cdot 60^\circ}{3} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{3} = \frac{60^\circ}{3} = 20^\circ,$$

тоді $x + 60^\circ = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ$. Отже, кут при вершині дорівнює 20° , кути при основі по 80° .

Відповідь: 1) $40^\circ, 70^\circ, 70^\circ$; 2) $20^\circ, 80^\circ, 80^\circ$.

502. 1)



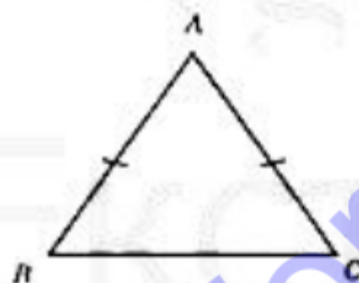
I випадок ($\angle B - \angle A = 15^\circ$)

Нехай $\angle A = x^\circ$, тоді $\angle B = x^\circ + 15^\circ$. Маємо рівняння: $x + x + x + 15^\circ = 180^\circ$, $3x = 165^\circ$, $x = 55^\circ$. Отже, $\angle A = \angle C = 55^\circ$, $\angle B = 70^\circ$.

II випадок ($\angle A - \angle B = 15^\circ$)

Нехай $\angle B = x^\circ$, тоді $\angle A = x^\circ + 15^\circ$. Маємо рівняння: $x + x + 15^\circ + x + 15^\circ = 180^\circ$, $3x + 30^\circ = 180^\circ$, $3x = 150^\circ$, $x = 50^\circ$. Отже, $\angle B = 50^\circ$, $\angle A = \angle C = 50^\circ + 15^\circ = 65^\circ$.

2)



I випадок ($\angle A = 2\angle C$)

Нехай $\angle B = \angle C = x^\circ$, тоді $\angle A = 2x^\circ$. Маємо рівняння: $x + x + 2x = 180^\circ$, $4x = 180^\circ$, $x = 45^\circ$. Отже, $\angle B = \angle C = 45^\circ$, $\angle A = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$.

II випадок ($\angle C = 2\angle A$)

Нехай $\angle A = x^\circ$, тоді $\angle B = \angle C = 2x^\circ$. Маємо рівняння: $x + 2x + 2x = 180^\circ$, $5x = 180^\circ$, $x = 36^\circ$. Отже, $\angle A = 36^\circ$, $\angle B = \angle C = 2 \times 36^\circ = 72^\circ$.

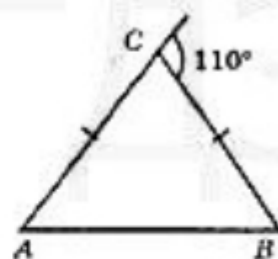
Відповідь: 1) $55^\circ, 55^\circ, 70^\circ$ або $65^\circ, 65^\circ, 50^\circ$; 2) $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ або $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$.

503. 1) I випадок



$\angle A = \angle B = 180^\circ - 110^\circ - 70^\circ$ (як суміжні кути). $\angle C = 110^\circ - 70^\circ = 40^\circ$ (за властивістю зовнішнього кута трикутника).

II випадок



$\angle C = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$ (як суміжні кути).

$\angle A = \angle B = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ$ (за властивістю зовнішнього кута). Отже, кути дорівнюють $70^\circ, 55^\circ, 55^\circ$.

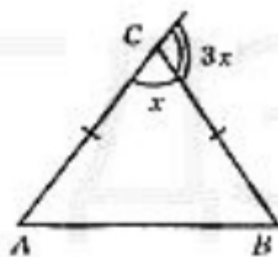
Відповідь: $70^\circ, 70^\circ, 40^\circ$ або $70^\circ, 55^\circ, 55^\circ$.

2) I випадок



$x + 3x = 180^\circ$, $4x = 180^\circ$, $x = 45^\circ$. Отже, $\angle A = \angle B = 45^\circ$, $\angle C = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$. Отже, кути дорівнюють $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.

II випадок

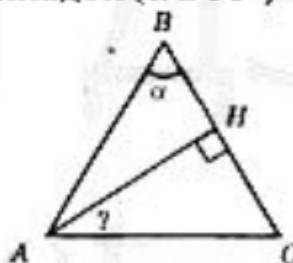


$x + 3x = 180^\circ$, $4x = 180^\circ$, $x = 45^\circ$. Отже, $\angle C = 45^\circ$, $\angle A = \angle B = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = \frac{135^\circ}{2} = 67^\circ 30'$.

Отже, кути трикутника дорівнюють $45^\circ, 67^\circ 30', 67^\circ 30'$.

Відповідь: $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ або $45^\circ, 67^\circ 30', 67^\circ 30'$.

504. 1) I випадок ($\alpha \leq 90^\circ$)

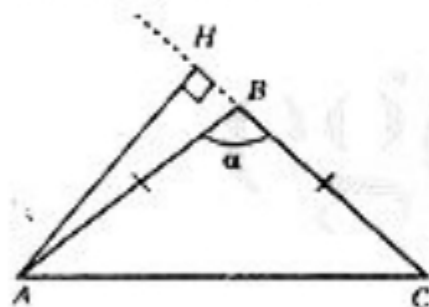


$$\angle HAC = 90^\circ - \angle C = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

1) Якщо $\alpha = 40^\circ$, то $\angle HAC = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$.

2) Якщо $\alpha = 50^\circ$, то $\angle HAC = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$.

II випадок ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$)



Якщо $\angle B = \alpha$, тоді

$$\angle A = \angle C = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

$$\angle HBA = 180^\circ - \alpha.$$

$$\text{З } \triangle HBA: \angle HAB = 90^\circ - (180^\circ - \alpha) = 90^\circ - 180^\circ +$$

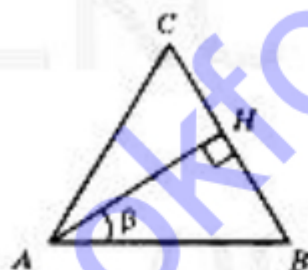
$$+ \alpha = \alpha - 90^\circ. \text{ Тоді } \angle HAC = \angle A + \angle HAB =$$

$$= 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \alpha - 90^\circ = \frac{\alpha}{2}.$$

3) Якщо $\alpha = 120^\circ$, то $\angle HAC = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$.

Відповідь: 1) 20° ; 2) 25° ; 3) 60° .

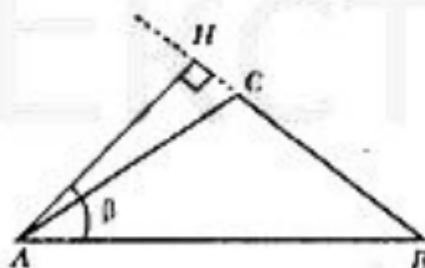
505. 1)



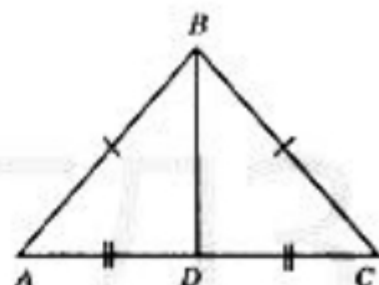
Якщо $\beta = 25^\circ$, $\angle B = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$,
 $\angle A = \angle B = 65^\circ$, $\angle C = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$.

2) Якщо $\beta = 30^\circ$, то $\angle B = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$,
 $\angle A = \angle B = 60^\circ$, $\angle C = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

3)

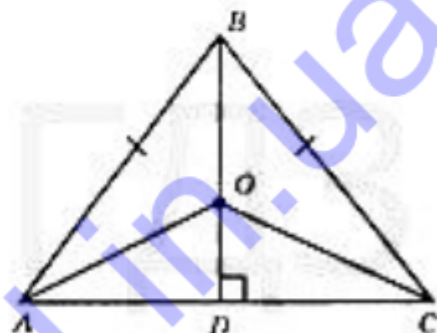


506.



Нехай $AD = DC$, $BD = BD$, тоді $\triangle ADB$ і $\triangle CDB$ — рівнобедрені. Отже, $\angle C = \angle DBC$, $\angle A = \angle DBA$. Додамо почленно дві останні рівності $\angle A + \angle C = \angle DBA + \angle DBC = \angle B$. Отже, $\angle A + \angle C = \angle B$.

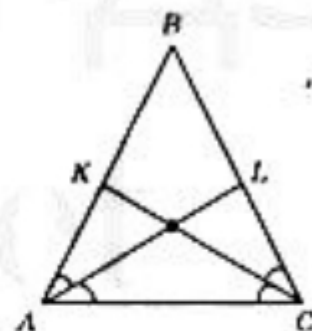
507.



Оскільки $\triangle ABC$ — рівнобедрений, то $AB = AC$. Оскільки BD — висота, то BD є бісектрисою. Отже, $\angle ABO = \angle CBO$.

$\triangle ABO = \triangle CBO$ за першою ознакою рівності трикутників, оскільки $AB = BC$, BO — спільна сторона, $\angle ABO = \angle CBO$. Із рівності трикутників випливає, що $AO = CO$.

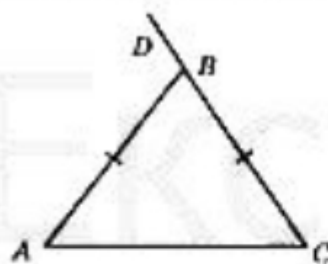
508.



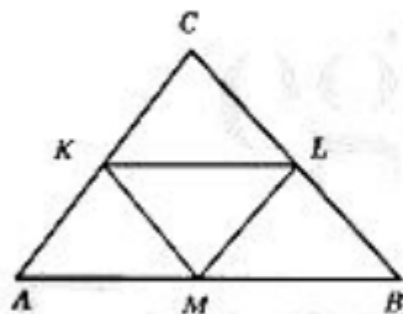
Нехай у $\triangle ABC$ ($AB = BC$) AL , CK — бісектриси. Доведемо, що $AL = CK$.

$\triangle ALC = \triangle CKA$ за другою ознакою рівності трикутників, оскільки $\angle A = \angle C$ (як кути при основі рівнобедреного трикутника, AC — спільна, $\angle LAC = \angle KCA$ — як половини рівних кутів. Із рівності трикутників випливає, що $AL = CK$.

кут при вершині рівнобедреного трикутника вдвічі більший за кут при основі.



510.



Нехай K, L, M — середини сторін рівнобедреного трикутника ABC ($AC = CB$). Розглянемо трикутники AKM і BLM . У них $AM = BM$ — за умовою, $AK = BL$ — як половини рівних сторін, $\angle A = \angle B$ — як кути при основі рівнобедреного трикутника. Отже, $\triangle AKM = \triangle BLM$. Із рівності трикутників випливає $KM = LM$, тобто $\triangle KLM$ — рівнобедрений.

511.



Нехай $\triangle ABC$ — рівнобедрений ($AB = BC$), $a \parallel AC$.

Оскільки $a \parallel AC$, то $\angle BPK = \angle PAC$, $\angle BKP = \angle KCA$ як відповідні кути при паралельних прямих a і AC і січних AP і CK). Отже, $\angle A = \angle C$ і $\angle BPK = \angle BKP$, тобто $\triangle BPK$ — рівнобедрений.

512.



$\triangle ADN = \triangle CMD = \triangle BNM$ — за першою ознакою рівності трикутників, оскільки $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$, $AD = CM = BN$ (за умовою), $AN = BM = CD$ (як різниці довжин сторони і відрізка AD). Із рівності трикутників випливає, що $DN = NM = MD$, тобто $\triangle DMN$ — рівносторонній.

513. 1. 1) $\triangle ABM = \triangle CBN$ за першою ознакою рівності трикутників, оскільки $AB = AC$ — за умовою, $BN = BM$ (за умовою), $\angle B$ — спільний. Із рівності трикутників випливає, що $AM = CN$, $\angle BAM = \angle BCN$, $\angle BMA = \angle BNC$.

2) Розглянемо $\triangle ANO$ і $\triangle CMO$. У них: $AN = CM$ (як різниці рівних відрізків), $\angle NAO = \angle MCO$ (за доведеним), $\angle ANO = \angle CMO$ (як суміжні кути до рівних кутів BMA і BNC). Отже, $\triangle ANO = \triangle CMO$ за другою ознакою рівності трикутників.

2. 2) $\triangle AMC = \triangle CNA$, оскільки AC — спільна, $AM = CN$ (за умовою), $\angle ACO = \angle CAO$ (за умовою). Із рівності цих трикутників випливає, що $\angle A = \angle C$, тобто $\triangle AOC$ — рівнобедрений.

1) Оскільки за умовою $\angle ACO = \angle CAO$, то $\triangle AOC$ — рівнобедрений згідно з ознакою рівнобедреного трикутника.

3. 1) $\triangle AOB = \triangle COB$ за другою ознакою рівності трикутників, оскільки $\angle ABO = \angle CBO$ (за умовою), $\angle AOB = \angle COB$ (за умовою), BO — спільна. Із рівності цих трикутників випливає, що $AO = OC$, тобто $\triangle AOC$ — рівнобедрений.

2) Оскільки $\triangle AOC$ — рівнобедрений, то $\angle CAO = \angle ACO$.

4. Оскільки $AB = BC$, то $\triangle ABC$ — рівнобедрений і $\angle A = \angle C$.

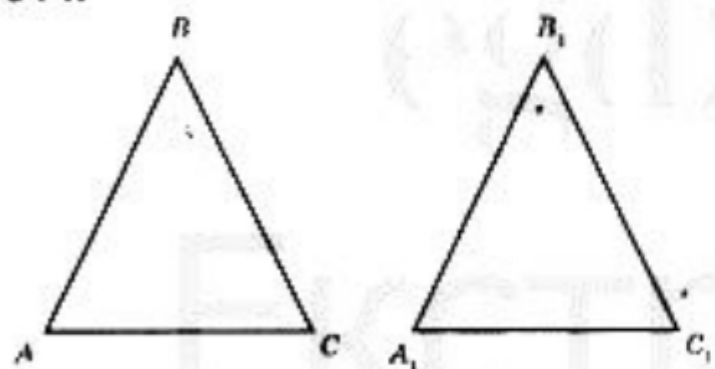
$\triangle ABD = \triangle CBE$ за першою ознакою рівності трикутників, оскільки $AB = BC$ (за умовою), $AD = CE$ (за умовою), $\angle A = \angle C$ — за доведеним. Із рівності трикутників випливає, що $\angle ABD = \angle CBE$.

5. $\triangle ABD = \triangle CBE$ за другою ознакою рів-

$= BE$, тобто $\triangle DBE$ — рівнобедрений, тоді $\angle BDE = \angle BED$.

6. $\triangle ABD = \triangle CBE$ за другою ознакою рівності трикутників, оскільки $AB = BC$ (за умовою), $\angle A = \angle C$ (за доведеним), $\angle ABD = \angle CBE$ (оскільки $\angle ABD = \angle ABE - \angle DBE$, $\angle CBE = \angle CBD - \angle DBE = \angle CBD$ і $\angle ABE$ — за умовою). Із рівності трикутників випливає, що $AD = EC$.

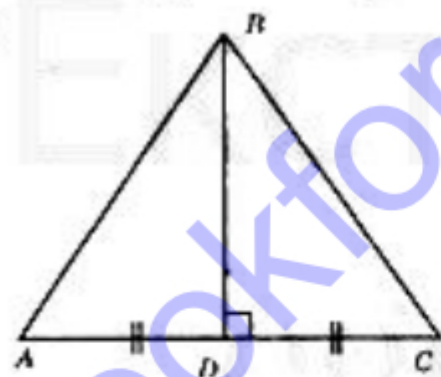
514.



Нехай у рівнобедрених трикутників ABC ($AB = BC$), $A_1B_1C_1$ ($A_1B_1 = B_1C_1$), $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$.

За властивістю рівнобедрених трикутників $\angle A = \angle C$, $\angle A_1 = \angle C_1$. Оскільки $\angle A = \angle A_1$, то $\angle C = \angle C_1$. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за другою ознакою рівності трикутників, оскільки $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$.

515. 1)



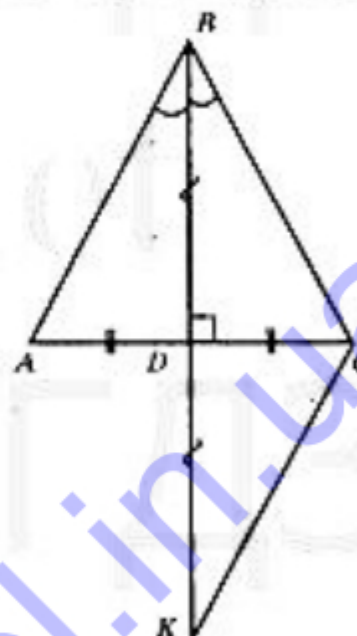
Нехай у $\triangle ABC$ $BD \perp AC$, $AD = DC$. $\triangle ABD = \triangle CBD$ за першою ознакою рівності трикутників, оскільки $AD = DC$ (за умовою), BD — спільна сторона, $\angle ADB = \angle CDB = 90^\circ$ (за умовою). З рівності трикутників випливає, що $AB = BC$, тобто $\triangle ABC$ — рівнобедрений.

2)



Нехай у $\triangle ABC$ $BD \perp AC$, $\angle ABD = \angle CBD$. $\triangle ABD = \triangle CBD$ за другою ознакою рівності трикутників, оскільки BD — спільна сторона, $\angle ABD = \angle CBD$ (за умовою), $\angle BDA = \angle BDC = 90^\circ$ (за умовою). З рівності трикутників випливає, що $AB = BC$, тобто $\triangle ABC$ — рівнобедрений.

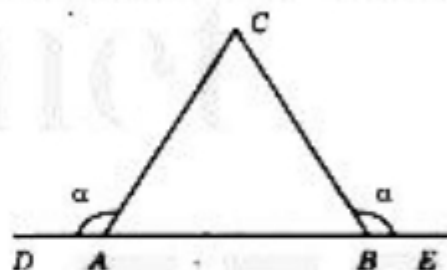
3)



Нехай у $\triangle ABC$ $\angle ABD = \angle CBD$, $AD = DC$. Продовжимо медіану BD так, щоб $BD = DK$. $\triangle ABD = \triangle CKD$ за першою ознакою рівності трикутників, оскільки $AD = DC$ (за умовою), $BD = DK$ (за умовою), $\angle BDA = \angle CDK$ (як вертикальні кути).

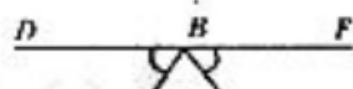
Із рівності трикутників випливає, що $AB = CK$, $\angle ABD = \angle CKD$. Оскільки $\angle CKD = \angle ABD = \angle CBD$, то $\triangle KBC$ — рівнобедрений, отже, $BC = CK$, але $CK = AB$, тоді $BC = AB$, тобто $\triangle ABC$ — рівнобедрений.

516.



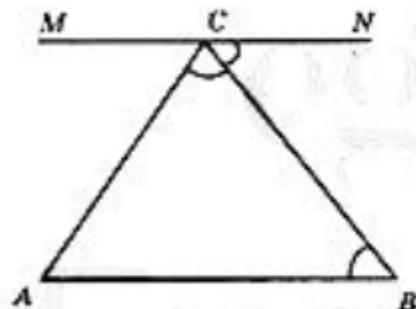
Нехай $\angle DAC = \angle EBC = \alpha$, тоді $\angle CAB = 180^\circ - \alpha$, $\angle CBA = 180^\circ - \alpha$. Оскільки у трикутника ABC два кути рівні, то $\triangle ABC$ — рівнобедрений.

517.



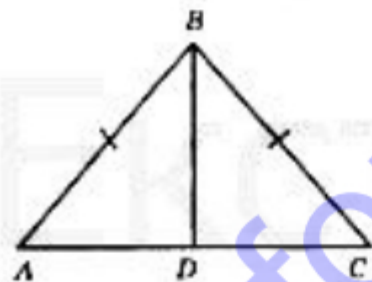
Нехай $DF \parallel AC$, $\angle DBA = \angle FBC$. За властивістю паралельних прямих маємо: $\angle A = \angle DBA$ — як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих DF і AC і січній AB , $\angle C = \angle FBC$ — як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих DF і AC і січній BC . Звідси $\angle A = \angle C$. Отже, $\triangle ABC$ — рівнобедрений.

518.



Нехай $MN \parallel AB$, $\angle NCB = \angle ACB$. Оскільки $MN \parallel AB$, $\angle CNB = \angle ABC$ — як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих і січній CB . Оскільки $\angle NCB = \angle ACB$, $\angle NCB = \angle ABC$, то $\angle ACB = \angle ABC$, тобто $\triangle ABC$ — рівнобедрений.

519.



Нехай в $\triangle ABC$ ($AB = BC$), $BD \perp AC$, $BD = \frac{1}{2} AC$.

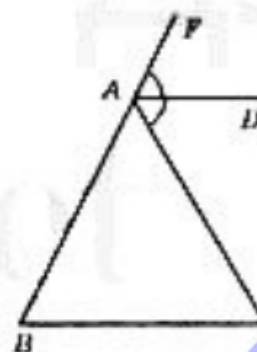
$\triangle ABD = \triangle CBD$ за першою ознакою рівності трикутників, оскільки $AB = BC$ (за умовою), BD — спільна сторона, $\angle ABD = \angle CBD$ (бо $\angle ABD = 90^\circ - \angle A$, $\angle CBD = 90^\circ - \angle C$, $\angle A = \angle C$). З рівності трикутників маємо $AD = DC$.

$\triangle ADB$, $\triangle CBD$ — прямокутні рівнобедрені, отже, $\angle A = 45^\circ$, $\angle ABD = 45^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, $\angle CBD = 45^\circ$.

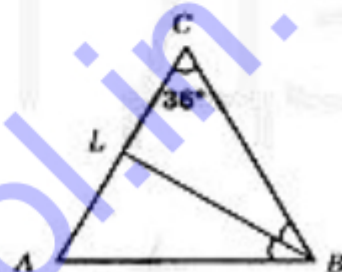
520. Нехай $\triangle ABC$ — рівнобедрений ($AB = BC$). AD — бісектриса зовнішнього ку-

$$= \frac{180^\circ - 180^\circ + 2\alpha}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha.$$

Оскільки $\angle DAC = \angle C$ — як внутрішні різносторонні кути при прямих AD і BC і січній AC , то $AD \parallel BC$.



521.



Нехай $\triangle ABC$ — рівнобедрений ($AC = CB$), $\angle C = 36^\circ$, BL — бісектриса кута B .

$\angle A = \angle B = (180^\circ - 36^\circ) : 2 = 72^\circ$. $\angle ABL = \angle LBC = 72^\circ : 2 = 36^\circ$. Отже, $\triangle CLB$ — рівнобедрений ($CL = LB$) з кутами: 36° , 36° і $180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$.

З $\triangle LBA$: $\angle ALB = 180^\circ - 72^\circ - 36^\circ = 72^\circ$. Отже, $\triangle ALB$ — рівнобедрений з кутами 36° , 72° , 72° .

Відповідь: два трикутники з кутами 36° , 36° , 108° ; 36° , 72° , 72° .

522. Оскільки $\triangle ABC$ — рівнобедрений і $\angle BAC = 2\angle ABC$, то знайдемо кути трикутника.

Нехай $\angle ABC = x^\circ$, тоді $\angle BAC = \angle BCA = 2x^\circ$. Масморівняння: $x + 2x + 2x = 180^\circ$; $5x = 180^\circ$; $x = 36^\circ$. Отже, кути $\triangle ABC$ дорівнюють: $\angle B = 36^\circ$, $\angle A = \angle C = 72^\circ$.

Оскільки AD — бісектриса, то

$$\angle BAD = \angle DAC = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ.$$

$\triangle ABD$ — рівнобедрений, тоді $BD = AD$.

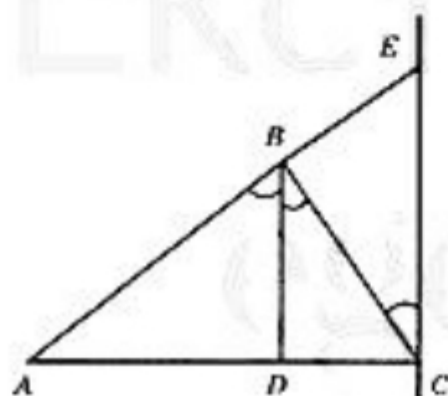
523. Оскільки $\triangle AOC$ — рівнобедрений, то $\angle OAC = \angle OCA$.

Розглянемо трикутники ABC і CDA . У них AC — спільна, $AB = CD$ (за умовою), $\angle BAC = \angle DCA$ (за доведеним). Отже, $\angle ACB = \angle CDA$. Із рівності цих трикутників маємо: $\angle DAC = \angle BSA$, $\angle DCA = \angle BAC$, $AD = BC$.

Оскільки $\angle DAC = \angle BSA$, $\angle DCA = \angle BAC$, то $\angle DAB = \angle DCB$ (як різниця рівних кутів $\angle DAB = \angle DAC - \angle BAC$, $\angle DCB = \angle BSA - \angle DCA$).

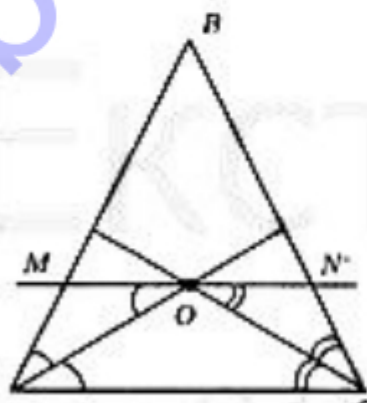
$\triangle ADB = \triangle CBD$ за першою ознакою рівності трикутників, оскільки $AB = CD$ (за умовою), $AD = BC$ (за доведеним), $\angle DAB = \angle BCD$ (за доведеним).

524.



Нехай у трикутнику ABC проведена бісектриса BD ($\angle ABD = \angle DBC$), $CE \parallel BD$. Оскільки $CE \parallel BD$, то $\angle DBC = \angle BCE$ — як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих і січній BC . Нехай $\angle ABD = \alpha$, тоді $\angle DBC = \alpha$, $\angle BCE = \alpha$. $\angle ABC$ — зовнішній кут $\triangle BCE$, тоді $\angle BEC = \angle ABC - \angle BCE = 2\alpha - \alpha = \alpha$. Отже, $\angle BEC = \angle BCE$, тобто $\triangle BCE$ — рівнобедрений.

525.



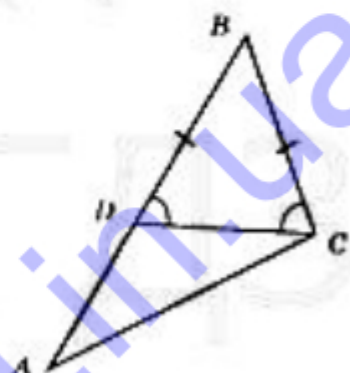
мих MN і AC і січній AO . Тоді $\angle MAO = \angle OAC = \angle MOA$.

Отже, $\triangle MOA$ — рівнобедрений, тоді $MO = AM$.

$\angle NOC = \angle OCA$ — як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих MN і AC і січній OC . Тоді $\angle NCO = \angle OCA = \angle CON$. Отже, $\triangle ONC$ — рівнобедрений, $ON = NC$.

Оскільки $AM = MO$, $ON = NC$, то $AM + NC = MO + ON = MN$. Отже, $AM + NC = MN$.

526.



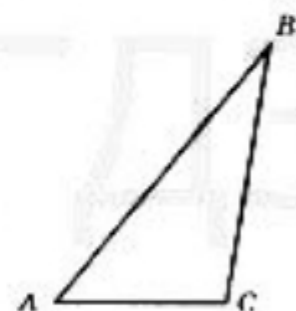
Доведемо, що проти більшої сторони в трикутнику лежить більший кут.

Нехай у $\triangle ABC$ $AB > BC$, доведемо, що $\angle C > \angle A$.

Відкладемо на стороні AB від точки B відрізок BD , що дорівнює BC .

$\triangle DBC$ — рівнобедрений, $\angle BDC = \angle BCD$ — як кути при основі рівнобедреного трикутника DBC . $\angle BDC$ — зовнішній кут трикутника ADC , тому він більший від кута A . Оскільки $\angle BCD = \angle BDC$, то і кут BCD більший від кута A . $\angle BCD > \angle A$. Але $\angle BCD$ становить тільки частину кута C , тому $\angle C > \angle A$.

Доведемо, що проти більшого кута в трикутнику лежить більша сторона.



Нехай $\angle C > \angle B$, доведемо, що

Якщо $AB < AC$, то $\angle C < \angle B$, що також суперечить умові.

Отже, можливий тільки один випадок, а саме $AB > AC$.

Застосуйте на практиці

527. $\triangle ADC = \triangle ABC$ за першою ознакою рівності трикутників, оскільки AC — спільна, $BC = DC$ — за умовою, $\angle ACD = \angle ACB = 90^\circ$.

Із рівності трикутників випливає, що $AB = AD$.

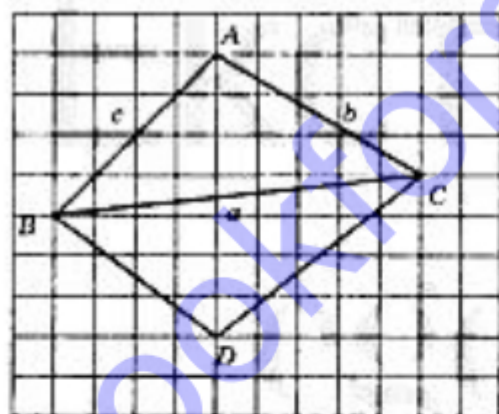
528. Щоб провести горизонтальну пряму, досить повернути $\triangle ABC$ так, щоб точка O розмістилася на відрізку BP .

§ 15. Третя ознака рівності трикутників

529. Відповідні рівні елементи: сторони $AB \parallel OM$, $AC \parallel MN$, $BC \parallel ON$. $\triangle ABC = \triangle MON$ за третьою ознакою рівності трикутників.

530. Ні, трикутники не рівні.

531.



$\triangle ABC = \triangle ADC$.

532. Мал. 300. $\triangle BOA = \triangle COD$, оскільки $AO = DO$, $BA = CD$, $BO = CO$.

Мал. 301. $\triangle ABC = \triangle CDA$, оскільки $AB = CD$, $AD = CB$, AC — спільна сторона.

Мал. 302. $\triangle ABC = \triangle ADC$, оскільки $AB = AD$, $BC = DC$, AC — спільна сторона.

533. Мал. 303. $\triangle ABE = \triangle CBE$, оскільки $AB = CB$, $AE = CE$, BE — спільна сторона.

Мал. 304. $\triangle ABC = \triangle ADC$, оскільки $AB = CD$, $BC = DA$, AC — спільна сторона. $\triangle ABD = \triangle CDB$, оскільки $AB = CD$, $BC = DA$, BD — спільна сторона.

534. Нехай $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, тоді $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$.

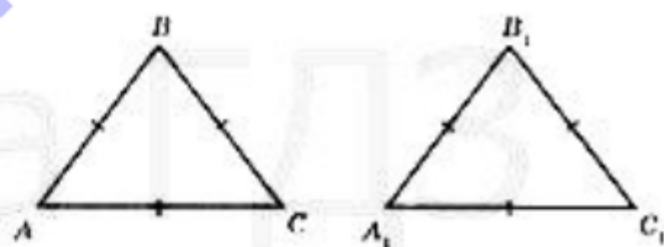
$$P_{\triangle ABC} = AB + AC + BC = A_1B_1 + A_1C_1 + B_1C_1 = P_{\triangle A_1B_1C_1}.$$

535. $\triangle ABC = \triangle EFD$ за трьома сторонами, тому $\angle A = \angle E$, $\angle B = \angle F$, $\angle C = \angle D$.

536.

$\triangle ABC$	$AB = 7$ см, $AC = 12$ см, $BC = 15$ см	$AC = 8$ см, $AB = 3$ см, $BC = 6$ см	$BC = 15$ см, $AC = 18$ см, $AB = 15$ см
$\triangle KPM$	$KP = 7$ см, $KM = 12$ см, $PM = 15$ см	$MK = 8$ см, $KP = 3$ см, $PM = 6$ см	$PM = 15$ см, $KM = 18$ см, $KP = 15$ см
$\triangle DEF$	$DE = 7$ см, $DF = 12$ см, $EF = 15$ см	$DF = 8$ см, $DE = 3$ см, $EF = 6$ см	$EF = 15$ см, $DF = 18$ см, $DE = 15$ см

537.



Нехай $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$ — рівносторонні ($AB = BC = AC$ і $A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1$) і $AB = A_1B_1$, тоді $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$. Отже, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за третьою ознакою рівності трикутників.

538. 1) $\triangle ADC = \triangle ABC$ за третьою ознакою рівності трикутників, оскільки $AD = AB$ (за умовою), $DC = CB$ — за умовою, AC — спільна сторона.

2) Із рівності цих трикутників випливає, що $\angle DAC = \angle BAC$, тобто AC — бісектриса кута BAD .

539. $\triangle ANC = \triangle AMC$ за третьою ознакою рівності трикутників, оскільки $AN =$

540. Оскільки $\triangle ABC$ і $\triangle ABD$ — рівнобедрені з основою AC , то $AB = BC$, $AD = DC$.
 1) $\triangle ABD = \triangle CBD$ за третьою ознакою рівності трикутників, оскільки $AB = BC$, $AD = DC$, BD — спільна сторона. Із рівності трикутників випливає, що $\angle BAD = \angle BCD$.

2) Із рівності трикутників ABD і CBD випливає, що $\angle ADB = \angle CDB$.

$\triangle AOD = \triangle COD$ за першою ознакою рівності трикутників, оскільки $AD = DC$, DO — спільна сторона, $\angle ADO = \angle CDO$ (за доведеним). Із рівності трикутників маємо $AO = OC$.

541. 1) $\triangle ACD = \triangle DBA$ за трьома сторонами, оскільки $AB = CD$, $AC = BD$, AD — спільна сторона. Із рівності трикутників випливає, що $\angle ABD = \angle DCA = 85^\circ$.

2) Із рівності трикутників ACD і DBA випливає також, що $\angle BDA = \angle CAD$, тоді $\triangle AOB$ — рівнобедрений за ознакою рівнобедреного трикутника, отже, $AO = OD$.

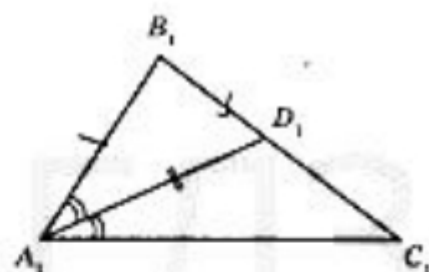
542. 1) $\triangle ABC = \triangle CDA$ за третьою ознакою рівності трикутників, оскільки $AB = CD$ — за умовою, $AD = BC$ — за умовою, AC — спільна сторона. Із рівності трикутників маємо: $\angle BAC = \angle ACD = 35^\circ$.

2) Із рівності трикутників ABC і CDA випливає, що $\angle ABC = \angle CDA$. Оскільки BE і DF — бісектриси, то $\angle ABE = \angle CDF = \angle CBE = \angle ADF$.

$\triangle ABE = \triangle CDF$ за другою ознакою рівності трикутників, оскільки $AB = CD$ (за умовою), $\angle BAE = \angle CDF$ (за доведеним), $\angle ABE = \angle CDF$ (за доведеним). Із рівності цих трикутників маємо: $AE = CF = 3$ см.

3) $\triangle BCE = \triangle DAF$ за першою ознакою рівності трикутників, оскільки: $BC = AD$ (за умовою), $BE = DF$ (за доведеним), $\angle CBE = \angle ADF$ (за доведеним).

543.

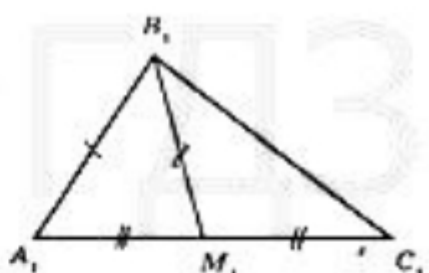
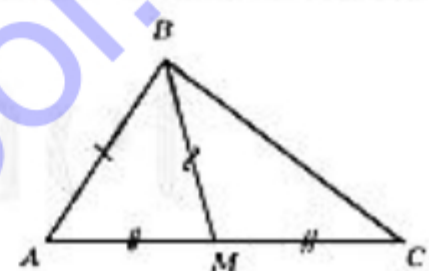


Нехай у трикутників ABC і $A_1B_1C_1$: AD і A_1D_1 — бісектриси, $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$ і $AD = A_1D_1$. Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.
 $\triangle ABD = \triangle A_1B_1D_1$ — за третьою ознакою рівності трикутників, оскільки за умовою задачі $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$, $AD = A_1D_1$.

Із рівності трикутників маємо: $\angle B = \angle B_1$, $\angle BAD = \angle B_1A_1D_1$.

$\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, оскільки AD і A_1D_1 — бісектриси рівних кутів. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ — за другою ознакою рівності трикутників, оскільки $AB = A_1B_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle A = \angle A_1$.

544.

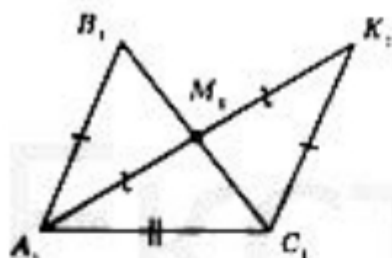


Нехай у трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, BM і B_1M_1 — медіани. Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

$\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$ — за трьома сторонами, оскільки $AB = A_1B_1$ (за умовою), $BM = B_1M_1$ (за умовою), $AM = A_1M_1$ (як половини рівних сторін).

Із рівності цих трикутників $\angle A = \angle A_1$. Тоді $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за першою ознакою рівності трикутників, оскільки $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$.

545.



Нехай у трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, AM , A_1M_1 — медіани ($BM = MC$, $B_1M_1 = M_1C_1$); $AM = A_1M_1$. Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Виконаємо побудову: на променях AM і A_1M_1 від точок M і M_1 відкладемо відрізки $MK = AM$, $M_1K_1 = A_1M_1$.

$\triangle BVM = \triangle KCM$ за першою ознакою рівності трикутників, оскільки $AM = KM$, $BM = MC$, $\angle BMA = \angle CMK$ — як вертикальні кути.

Із рівності цих трикутників маємо $KC = AB$.

$\triangle A_1B_1M_1 = \triangle K_1C_1M_1$ за першою ознакою рівності трикутників, оскільки $A_1M_1 = K_1M_1$, $B_1M_1 = C_1M_1$, $\angle B_1M_1C_1 = \angle C_1M_1K_1$ — як вертикальні кути.

Із рівності цих трикутників маємо: $K_1C_1 = A_1B_1$.

$\triangle AKC = \triangle A_1K_1C_1$ за трьома сторонами, оскільки $AC = A_1C_1$, $AK = A_1K_1$, $KC = K_1C_1$.

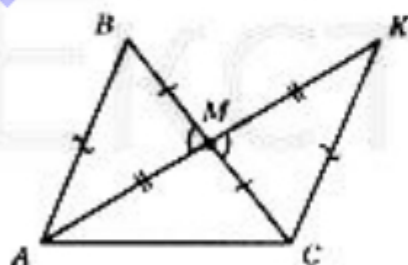
Із рівності цих трикутників маємо: $\angle KAC = \angle K_1A_1C_1$.

$\triangle AMC = \triangle A_1M_1C_1$ за першою ознакою рівності трикутників, оскільки $AM = A_1M_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle MAC = \angle M_1A_1C_1$.

Із рівності цих трикутників маємо: $MC = M_1C_1$, тоді $BC = 2MC$, $2B_1M_1 = 2M_1C_1$, а значить, $BC = B_1C_1$.

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за трьома сторонами, оскільки $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$.

546.



На промені AM від точки M відкладемо

вугу, що $AK = 2AM$, $KC = AB$, маємо:

$$2AM < AC + AB, \text{ тоді } AM < \frac{AC + AB}{2}.$$

§ 16. Ознаки рівності прямокутних трикутників

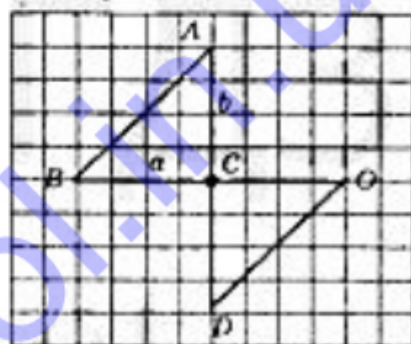
549. Ні, трикутники не рівні.

550. Мал. 319. $\triangle CAB = \triangle HDQ$ (за катетом і гострим кутом: $CA = HD$, $\angle C = \angle H$).

Мал. 320. $\triangle ABC = \triangle CDA$ (за гіпотенузою AC і гострим кутом: $\angle BAC = \angle DAC$).

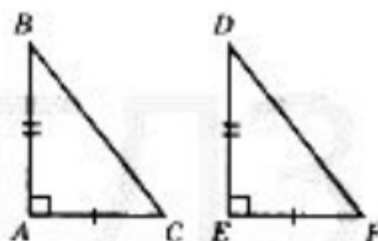
Мал. 321. $\triangle AOB = \triangle DCO$ (за гіпотенузою і катетом: $BO = OC$, $AO = DC$).

551.



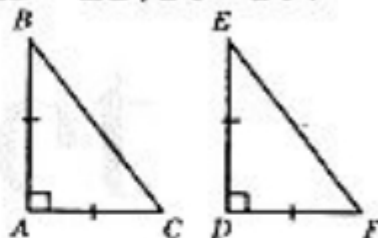
$$\triangle ABC = \triangle DOC.$$

552. 1)



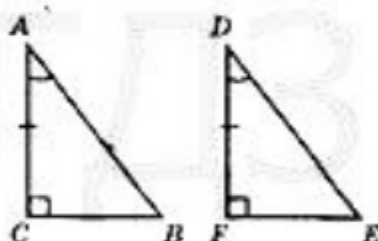
$$\angle C = \angle F, \angle B = \angle D, BC = DF.$$

2)



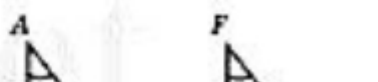
$$\angle B = \angle E, \angle C = \angle F, BC = EF.$$

3)

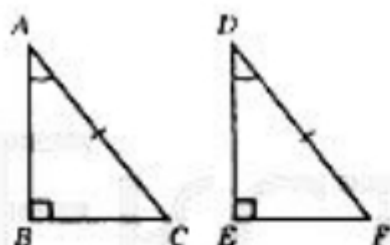


$$AB = DE, CB = FE, \angle B = \angle E.$$

4)

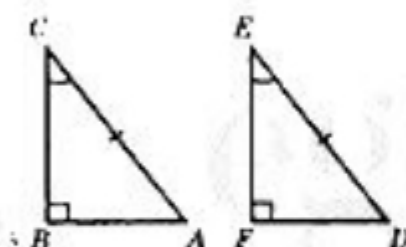


5)



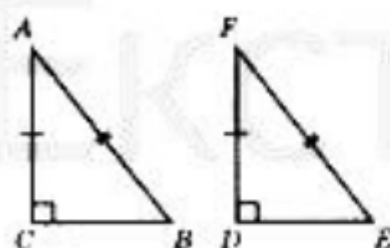
$$AB = DE, BC = EF, \angle A = \angle D.$$

6)



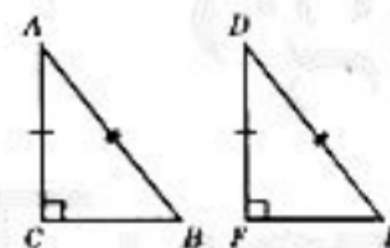
$$\angle A = \angle D, CB = EF, BA = FD.$$

7)



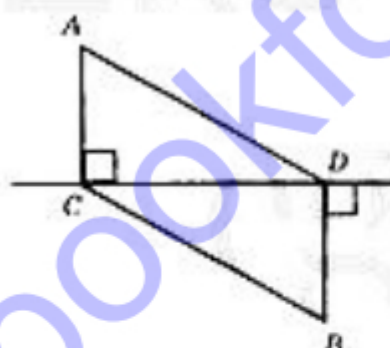
$$CB = DE, \angle A = \angle F, \angle B = \angle E.$$

8)



$$CB = FE, \angle A = \angle D, \angle B = \angle E.$$

553.



$\triangle ADC = \triangle BDC$ (за двома катетами: $AC = BD$ — за умовою, CD — спільний катет). Із рівності трикутників випливає: $AD = BC$:

1) 5 см; 2) 0,15 дм; 3) 100 мм.

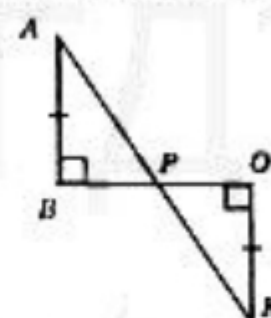
554.



катет). Із рівності цих трикутників маємо: $AD = BC$:

1) 2,5 см; 2) 50 мм; 3) 0,4 дм.

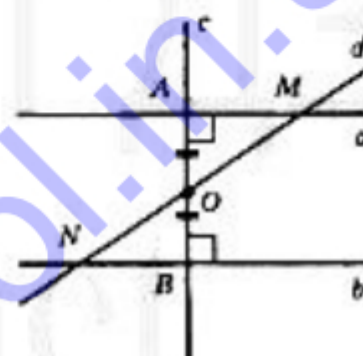
555.



$\triangle ABP = \triangle KOP$ (за катетом і гострим кутом: $AB = KO$, $\angle APB = \angle KPO$ — як вертикальні). Із рівності цих трикутників маємо: $PO = BP$:

1) 12 мм; 2) 2,25 см; 3) 10 дм.

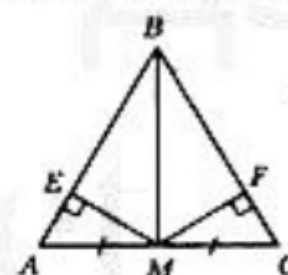
556.



$\triangle AOM = \triangle BON$ (за катетом і гострим кутом: $AO = BO$ — за умовою, $\angle AOM = \angle BON$ — як вертикальні кути). Із рівності цих трикутників маємо: $OM = ON$:

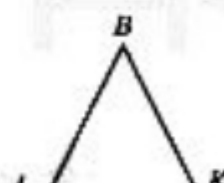
1) 9,12 см; 2) 0,112 дм; 3) 39 мм.

557.



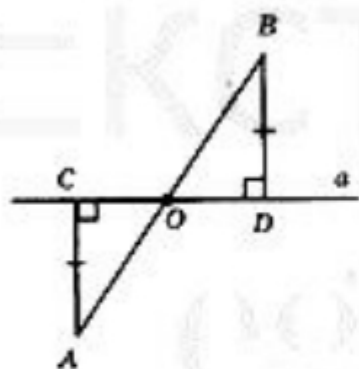
$\triangle BEM = \triangle BFM$ (за гіпотенузою і гострим кутом, оскільки BM — спільна гіпотенуза, $\angle EBM = \angle FBM$, оскільки BM — медіана, то BM — бісектриса). Із рівності цих трикутників маємо: $ME = MF$.

558.



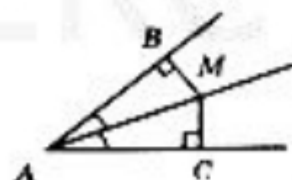
— $\angle CLA$ за гіпотенузою і гострим кутом (AC — спільна гіпотенуза, $\angle A = \angle C$). Із рівності цих трикутників маємо: $AK = CL$.

559.



Точка O — середина відрізка AB , тоді $AO = BO$. $AC \perp a$, $BD \perp a$. $\triangle ACO = \triangle BDO$ за гіпотенузою і гострим кутом ($AO = BO$, $\angle AOC = \angle BOD$ — як вертикальні кути), тоді $AC = BD$.

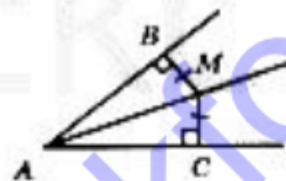
560.



Оскільки AM — бісектриса кута A , то $\angle BAM = \angle CAM$. $MB \perp AB$, $MC \perp AC$. Доведемо, що $MB = MC$.

$\triangle ABM = \triangle ACM$ — за гіпотенузою і гострим кутом (AM — спільна гіпотенуза, $\angle BAM = \angle CAM$), тоді $MB = MC$.

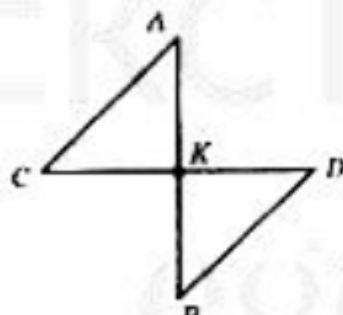
561.



$MB \perp AB$, $MC \perp AC$, $BM = CM$. Доведемо, що M належить бісектрисі кута A , тобто $\triangle BAM = \triangle CAM$.

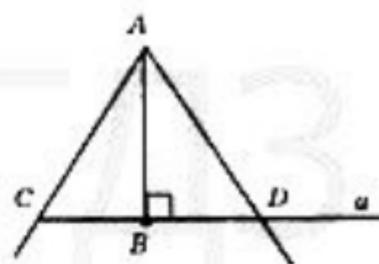
$\triangle ABM = \triangle ACM$ за гіпотенузою і катетом (AM — спільна, $BM = CM$ — за умовою), тоді $\angle BAM = \angle CAM$.

562.



- 1) $\angle KAC = 30^\circ$; 2) $\angle KAC = 60^\circ$;
3) $\angle KAC = 27^\circ$.

563.



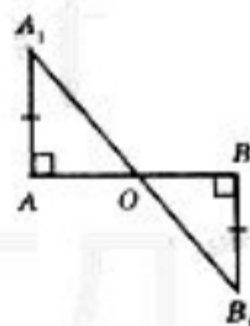
$AB \perp a$, $AC = AD$.

Оскільки $\triangle ACD$ — рівнобедрений, AB — його висота, отже, AB — його бісектриса, то $\angle CAB = \angle DAB$.

$$\angle ACB = \angle ADB = \frac{180^\circ - 2\angle DAB}{2} = 90^\circ - \angle DAB.$$

- 1) $\angle CAB = 10^\circ$, $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ - 10^\circ = 80^\circ$;
2) $\angle CAB = 20^\circ$, $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$;
3) $\angle CAB = 30^\circ$, $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

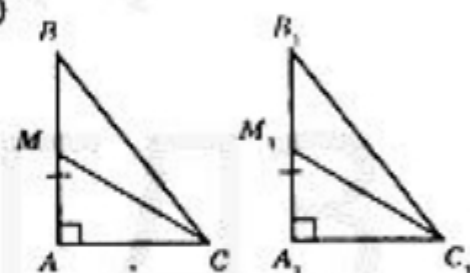
564.



$AA_1 \perp AB$, $BB_1 \perp AB$, $AA_1 = BB_1$.

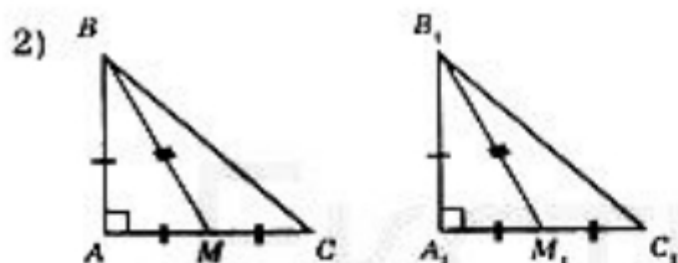
$\triangle AA_1O = \triangle BB_1O$ за катетом і гострим кутом ($AA_1 = BB_1$, $\angle A_1OA = \angle B_1OB$ як вертикальні кути), тоді $AO = BO$, тобто точка O — середина відрізка AB .

565. 1)



Нехай $AB = A_1B_1$, $AM = B_1M_1$, $A_1M_1 = B_1M_1$, $CM = C_1M_1$.

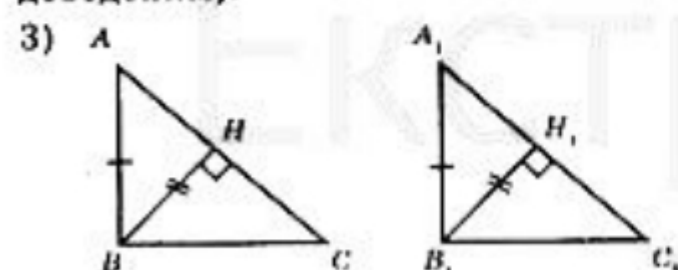
$\triangle AMC = \triangle A_1M_1C_1$ — за гіпотенузою і катетом ($AM = A_1M_1$, $CM = C_1M_1$), тоді



Нехай $AB = A_1B_1$, $AM = MC$, $A_1M_1 = M_1C_1$, $BM = B_1M_1$.

$\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$ — за катетом і гіпотенузою ($AB = A_1B_1$, $BM = B_1M_1$), тоді $AM = A_1M_1$. Звідси $AC = A_1C_1$ — оскільки половини цих відрізків рівні.

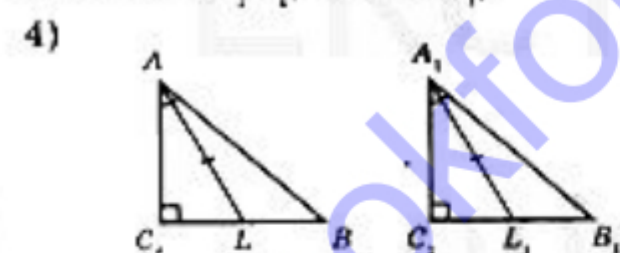
$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за двома катетами ($AB = A_1B_1$ — за умовою, $AC = A_1C_1$ — за доведеним).



Нехай $AB = A_1B_1$, $BH \perp AC$, $B_1H_1 \perp A_1C_1$, $BH = B_1H_1$.

$\triangle ABH = \triangle A_1B_1H_1$ (за катетом і гіпотенузою: $AB = A_1B_1$, $BH = B_1H_1$), тоді $\angle A = \angle A_1$.

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (за катетом і гострим кутом: $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$).



$\angle A = \angle A_1$, AL і A_1L_1 — бісектриси, $\angle CAL = \frac{1}{2} \angle A$, $\angle C_1A_1L_1 = \frac{1}{2} \angle A_1$, $AL =$

$= A_1L_1$. $\triangle CAL = \triangle C_1A_1L_1$ — за гіпотенузою і гострим кутом ($AL = A_1L_1$, $\angle CAL = \angle C_1A_1L_1$), тоді $AC = A_1C_1$.

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за катетом і гострим кутом ($AC = A_1C_1$ — за доведеним, $\angle A = \angle A_1$ — за умовою).

$AC = A_1C_1$, $BH \perp AC$, $B_1H_1 \perp A_1C_1$, $BH = B_1H_1$.

Оскільки $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$ — рівнобедрені і $BH \perp AC$, $B_1H_1 \perp A_1C_1$, то

$$AH = A_1H_1 = HC = H_1C_1 = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} A_1C_1.$$

$\triangle ABH = \triangle A_1B_1H_1$ за двома катетами ($BH = B_1H_1$ — за умовою, $AH = A_1H_1$ — за доведеним), тоді $\angle A = \angle A_1$, отже, і $\angle C = \angle C_1$ — як кути при основі рівнобедреного трикутника.

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ — за другою ознакою рівності трикутників ($AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$).

567. 1)

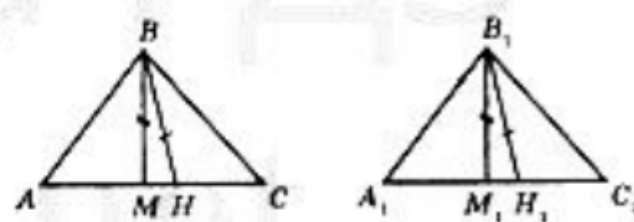


$BH \perp AC$, $B_1H_1 \perp A_1C_1$, $\angle ABH = \angle A_1B_1H_1$, $\angle HBC = \angle H_1B_1C_1$.

$\triangle ABH = \triangle A_1B_1H_1$ за катетом і гострим кутом ($BH = B_1H_1$ — за умовою, $\angle ABH = \angle A_1B_1H_1$ — за умовою), тоді $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$.

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ — за стороною і двома прилеглими кутами ($AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$).

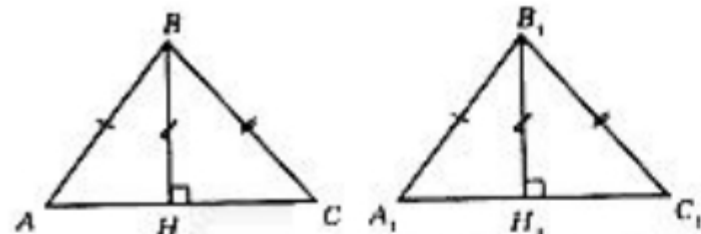
2)



$BH \perp AC$, $B_1H_1 \perp A_1C_1$, $BH = B_1H_1$, $AM = MC$, $A_1M_1 = M_1C_1$, $BM = B_1M_1$, $AC = A_1C_1$.

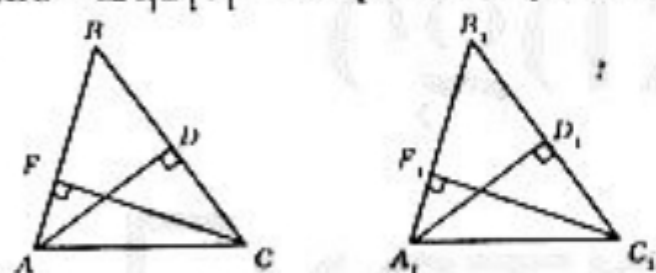
$\triangle BHM = \triangle B_1H_1M_1$ за гіпотенузою і катетом ($BM = B_1M_1$, $BH = B_1H_1$), тоді $HM = H_1M_1$. Оскільки $AC = A_1C_1$, то $AM = A_1M_1$ — як половини рівних сторін, тоді $AH = A_1H_1$.

$\triangle ABH = \triangle A_1B_1H_1$ за двома катетами ($BH = B_1H_1$, $AH = A_1H_1$), тоді $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$.



$\triangle ABH = \triangle A_1B_1H_1$ за гіпотенузою і катетом ($AB = A_1B_1$, $BH = B_1H_1$), тоді $AH = A_1H_1$.
 $\triangle BHC = \triangle B_1H_1C_1$ за гіпотенузою і катетом ($BC = B_1C_1$, $BH = B_1H_1$), тоді $HC = H_1C_1$.
 $AC = AH + HC$; $A_1C_1 = A_1H_1 + H_1C_1$, $AC = A_1C_1$.
 $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ — за трьома сторонами.

2)



$AC = A_1C_1$, $AD \perp BC$, $CF \perp AB$, $A_1D_1 \perp B_1C_1$,
 $C_1F_1 \perp A_1B_1$, $AD = A_1D_1$, $CF = C_1F_1$.
 $\triangle ADC = \triangle A_1D_1C_1$ за гіпотенузою і катетом ($AC = A_1C_1$, $AD = A_1D_1$), тоді $\angle C = \angle C_1$.
 $\triangle ACF = \triangle A_1C_1F_1$ за гіпотенузою і катетом ($AC = A_1C_1$, $CF = C_1F_1$), тоді $\angle A = \angle A_1$.
 $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за стороною і двома прилеглими кутами ($AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$).

569. Мал. 323.

$$\angle A = \angle C = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ.$$

З прямокутного трикутника ABD:

$$BD = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3 \text{ (см)}.$$

Мал. 324. Із $\triangle ACD$:

$$CD = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4 \text{ (см)}.$$

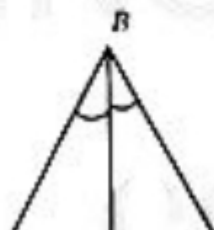
Із $\triangle CDB$: $BD = CD = 4$ см.

Мал. 325. Із $\triangle BCD$: $\angle B = 60^\circ$, $\angle BCD = 30^\circ$,

$$BD = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 1) 3 см; 2) 4 см; 3) 5 см.

570.



Нехай у $\triangle ABC$ $\angle A = 90^\circ$, $\angle C = 60^\circ$. Доведемо, що $AC = \frac{1}{2} BC$.

На продовженні катета AC відкладемо відрізок $AD = AC$ і сполучимо точки B і D. $\triangle ABC = \triangle ABD$ за двома катетами ($AC = AD$ — за побудовою, AB — спільний катет). З рівності трикутників маємо: $\angle C = \angle D = \angle CBD = 60^\circ$, тобто $\triangle BCD$ — рівносторонній. Оскільки $AC = \frac{1}{2} CD$,

а $CD = BC$, то $AC = \frac{1}{2} BC$.

571.

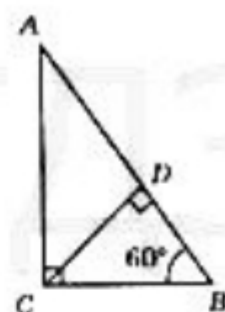


$AH \perp BC$, $\angle ABH = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. З $\triangle ABH$:

$$AH = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 7 см.

572.



$\angle B = 60^\circ$, тоді $\angle A = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

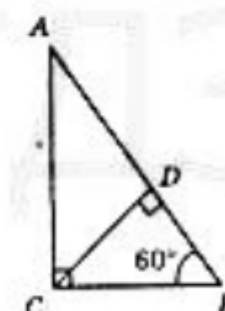
$\angle DCB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

З $\triangle BCD$: $CB = 2 \times DB = 2 \times 1 = 2$ (см).

З $\triangle ABC$: $AB = 2 \times CB = 2 \times 2 = 4$ (см).

Відповідь: 4 см.

573.



Нехай $\triangle ABC$ — прямокутний ($\angle C = 90^\circ$),

$$DB = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3 \text{ (см)}.$$

$$AD = AB - DB = 12 \text{ см} - 3 \text{ см} = 9 \text{ см}.$$

Відповідь: 3 см, 9 см.

574. $\triangle ABC$ — прямокутний: $\angle B = 30^\circ$,
тоді $AB = 2AC = 2a$.

$\triangle ACD$ — прямокутний, $\angle A = 60^\circ$, $\angle DCA =$
 $= 30^\circ$, тоді $AD = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$.

$\triangle BCD$ — прямокутний, $\angle B = 30^\circ$, тоді

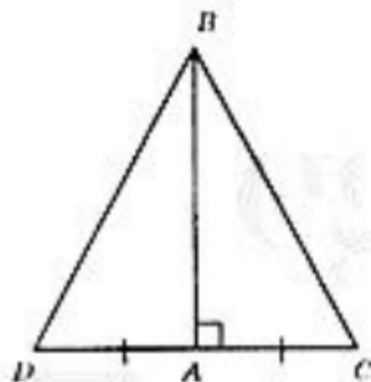
$$CD = \frac{BC}{2} = \frac{b}{2}. \quad BD = AB - AD = 2a - \frac{a}{2} =$$

$$= \frac{3a}{2}.$$

Відповідь: $AB = 2a$, $AD = \frac{a}{2}$, $CD = \frac{b}{2}$,

$$BD = \frac{3a}{2}.$$

575.

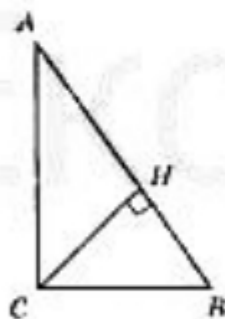


Нехай у прямокутному $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$),

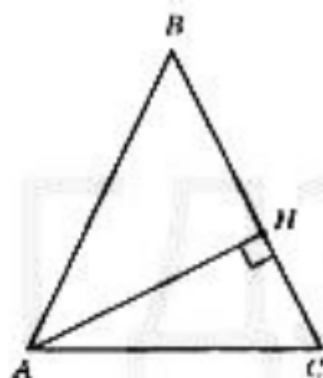
$$AC = \frac{1}{2}AB.$$

На промені AC від точки C відкладемо
відрізок $CD = AC$. З'єднаємо точки D і B ,
отже, $AD = AB$. Оскільки BC — медіана і
висота $\triangle DBA$, то $\triangle DBA$ — рівнобедрений,
тобто $DB = AB$. Отже, $AD = AB = DB$, тобто
 $\triangle ABD$ — рівносторонній, тоді $\angle A = 60^\circ$,
 $\angle CBA = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

576.



577.



$\triangle ABC$ — рівнобедрений ($AB = BC = 6$ см),
 $AH \perp BC$, $AH = 3$ см.

$\triangle ABH$ — прямокутний, $AB = 6$ см,
 $AH = 3$ см, $AH = \frac{1}{2}AB$, отже, $\angle B = 30^\circ$,

тоді $\angle A = \angle C = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$.

Відповідь: $30^\circ, 75^\circ, 75^\circ$.

578.



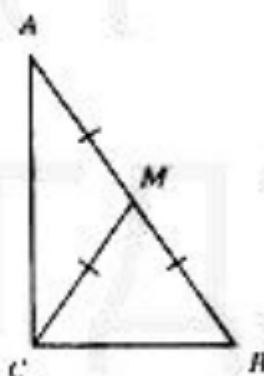
$AB = BC = AC = 12$ см, $DM \perp AC$,

$$DC = \frac{1}{2}BC = 6 \text{ см}.$$

$\triangle DMC$ — прямокутний, $\angle C = 60^\circ$,
 $\angle MDC = 30^\circ$, тоді $MC = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2} \cdot 6 =$
 $= 3$ (см). $AM = AC - MC = 12 \text{ см} - 3 \text{ см} =$
 $= 9$ см.

Відповідь: 9 см.

579.

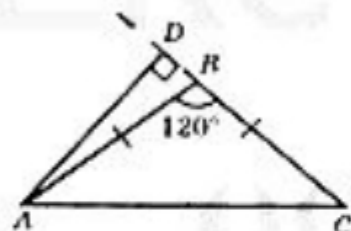


Нехай M — середина сторони AB , тоді
 $AM = MB$.

$\triangle CMB$ — рівнобедрений, тоді $\angle B = \angle MCB = y^\circ$.

Оскільки сума кутів трикутника дорівнює 180° , то маємо: $\angle A + \angle B + \angle C = x^\circ + y^\circ + x^\circ + y^\circ = 180^\circ$; $2(x^\circ + y^\circ) = 180^\circ$; $x^\circ + y^\circ = 90^\circ$. Отже, $\angle ACB = x^\circ + y^\circ = 90^\circ$.

580.



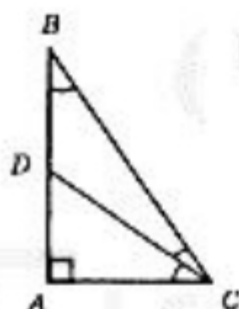
Нехай $\triangle ABC$ — рівнобедрений, $AB = BC$, $\angle ABC = 120^\circ$, $AD \perp BC$, $AD = 9$ см.

$\triangle ADC$ — прямокутний, $\angle C = \frac{180^\circ - \angle B}{2} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$. Тоді $AC = 2AD = 2 \times$

$\times 9$ см = 18 см.

Відповідь: 18 см.

581.



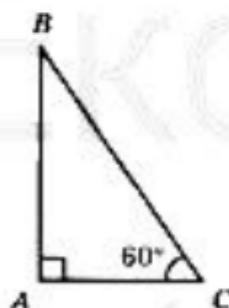
У прямокутному $\triangle ABC$: $\angle C = 60^\circ$, $\angle A = 90^\circ$, CD — бісектриса кута C , тоді $\angle DCA = 30^\circ$.

$\triangle CBD$ — рівнобедрений, оскільки $\angle B = 30^\circ$, $\angle BCD = 30^\circ$, отже, $BD = DC$.

За умовою задачі $BA - DC = 1$ см, тобто $AD = 1$ см. Із трикутника ACD маємо: $CD = 2 \times AD = 2 \times 1 = 2$ (см).

Відповідь: 2 см.

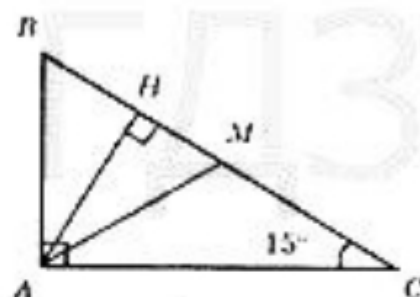
582.



$3x = 45$; $x = 15$, тоді $2x = 30$ см. Отже, $BC = 30$ см.

Відповідь: 30 см.

583.



Нехай у прямокутному $\triangle ABC$: $\angle C = 15^\circ$, $AH \perp BC$, AM — медіана, $AM = 8$ см.

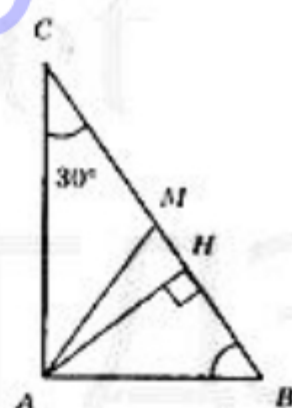
Оскільки $AM = MC = BM$, то $\triangle AMC$ — рівнобедрений, тоді $\angle MAC = 15^\circ$.

$\angle HAM = \angle HAC - \angle MAC = (90^\circ - 15^\circ) - 15^\circ = 60^\circ$, тоді $\angle AMH = 90^\circ - \angle HAM = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. З $\triangle AMH$ маємо: $AH =$

$= \frac{1}{2} AM = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$ (см).

Відповідь: 4 см.

584.



Нехай у $\triangle ABC$: $\angle C = 30^\circ$, AM — медіана, $AH \perp BC$, $AM = 10$ см,

Оскільки $AM = 10$ см, то $BC = 2 \times AM = 2 \times 10 = 20$ (см).

З $\triangle ABC$ маємо: $AB = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$ (см).

Із $\triangle ABH$ ($\angle H = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle A = 30^\circ$) маємо: $BH = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ (см).

Тоді $MH = MB - BH = 10$ см $- 5$ см $= 5$ см.

Відповідь: 5 см.

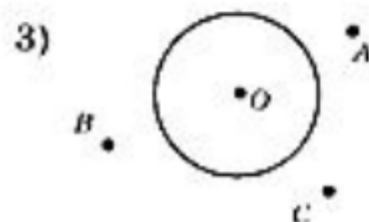
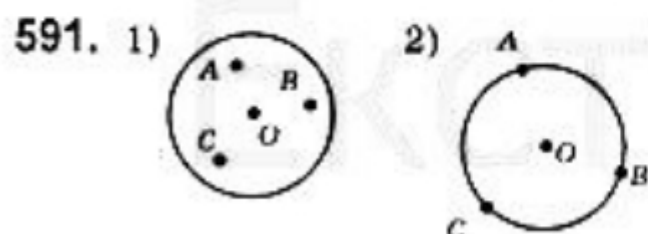
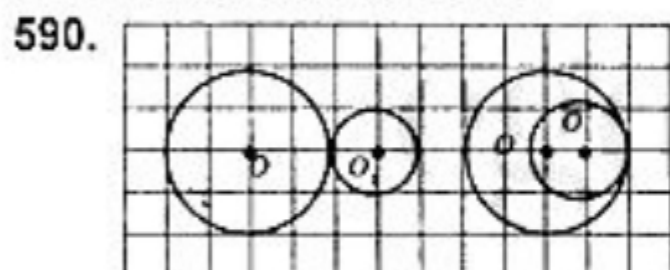
§ 17. Коло і круг

588. 1) Хордами є відрізки: KB , NC , KN , CB , LD .

2) Діаметрами є відрізки: LD , NC , KB .

3) Радіусами кола є відрізки: OL , OK , OC , OD , OB , ON .

589. Дотичні до кола: AC , CB , AB .
 $ON \perp AC$, $OM \perp CB$, $OK \perp AB$.



592. Щоб знайти діаметр кола, треба радіус збільшити вдвічі:

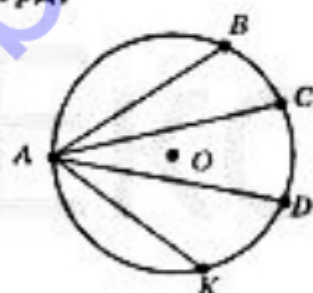
1) $6,5 \text{ см} \times 2 = 13 \text{ см}$; 2) $2,6 \text{ см} \times 2 = 5,2 \text{ см}$;
 3) $m \times 2 = 2m \text{ см}$; 4) $2n \times 2 = 4n \text{ см}$.

593. Щоб знайти радіус кола, треба діаметр кола поділити пополам:

1) $4,2 : 2 = 2,1 \text{ см}$; 2) $8,2 : 2 = 4,1 \text{ см}$;
 3) $a : 2 = \frac{a}{2} \text{ см}$; 4) $2a : 2 = a \text{ см}$.

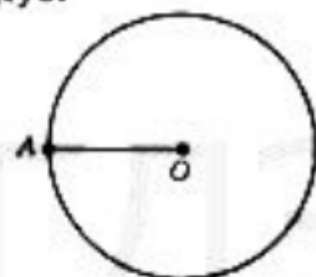
594. З однієї точки можна провести:

1) безліч хорд;



2) один діаметр;

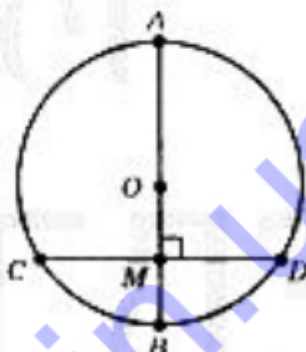
3) один радіус.



595. Оскільки хорда не може бути більше діаметра, то:

1) Може; 2) може; 3) ні; 4) може.

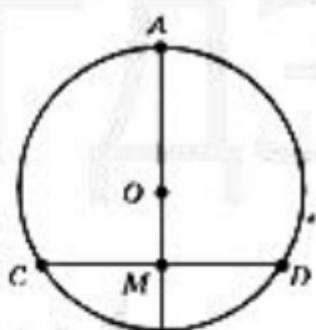
596.



1) AM не завжди дорівнює BM . Рівність досягається, якщо точка M співпадає з центром кола.

2) $CM = DM$ завжди, оскільки $\triangle COM = \triangle DOM$ (за гіпотенузою і катетом: $CO = DO$ — як радіуси кола, OM — спільна), то $CM = DM$.

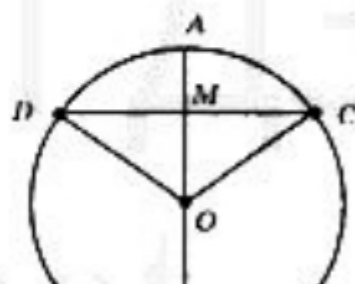
597.



Щоб знайти хорду, треба довжину даного відрізка помножити на 2:

1) $0,5 \text{ дм} \times 2 = 1 \text{ дм}$; 2) $30 \text{ мм} \times 2 = 60 \text{ мм}$;
 3) $4,5 \text{ см} \times 2 = 9 \text{ см}$; 4) $0,07 \text{ дм} \times 2 = 0,14 \text{ дм}$.

598.



$\triangle COD$ — рівнобедрений, отже, $OD = OC$, $LD = LC$.

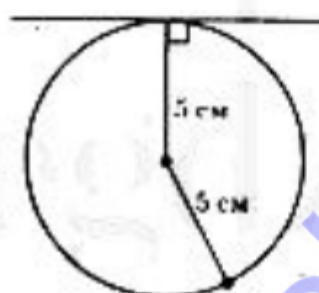
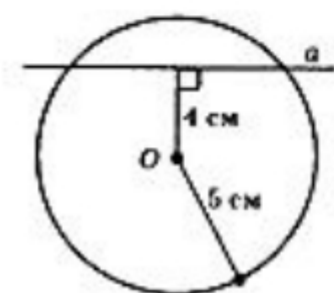
$\triangle OCM = \triangle ODM$ за першою ознакою рівності трикутників ($OD = OC$, $CM = DM$, $LD = LC$). Отже, $\angle OMC = \angle OMD = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$. $AB \perp DC$.

599. Якщо відрізки рівні і не дорівнюють радіусу кола, то можна стверджувати, що $AB \perp CD$.

- 1) $2 \text{ см} = 0,2 \text{ дм}$, отже, $AB \perp CD$;
- 2) $30 \text{ мм} \neq 0,3 \text{ см}$, отже, AB не перпендикулярна CD ;
- 3) $40 \text{ см} = 4 \text{ дм}$, отже, $AB \perp CD$;
- 4) $26 \text{ см} \neq 0,26 \text{ дм}$, отже, AB не перпендикулярна CD .

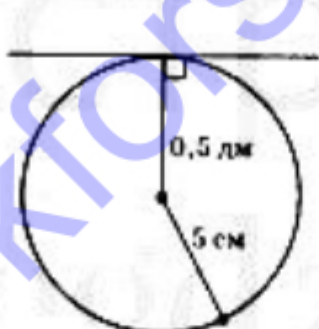
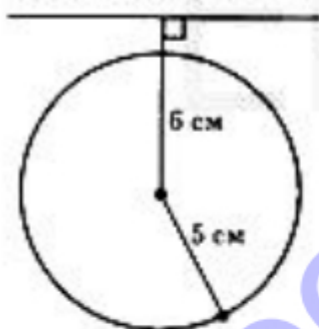
600.

- 1) Перетинаються.
- 2) Дотикаються.

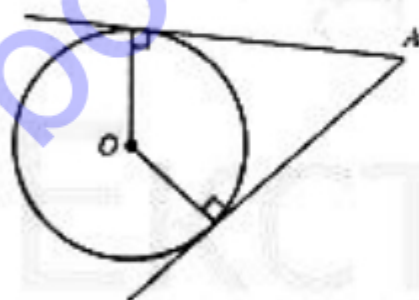


- 3) Не мають спільних точок.

- 4) Дотикаються.



601. 1)



Через дану точку, що лежить поза колом, можна провести дві різні дотичні.

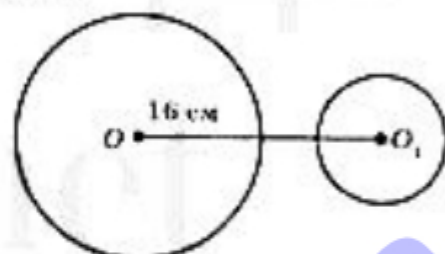


Через дану точку, що лежить на колі, можна провести тільки одну дотичну.

3) Через точку кола, яка лежить всередині кола, дотичну провести не можна.

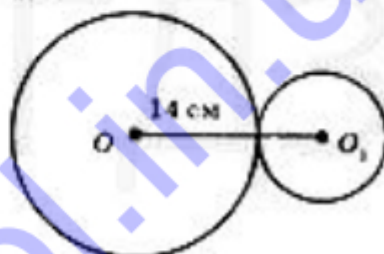
602. 1) Не мають спільних точок ($R = 10 \text{ см}$, $r = 5 \text{ см}$).

$OO_1 = 16 \text{ см}$.



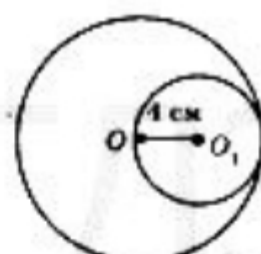
2) Дотикаються зовні ($R = 8 \text{ см}$, $r = 6 \text{ см}$).

$OO_1 = 14 \text{ см}$.

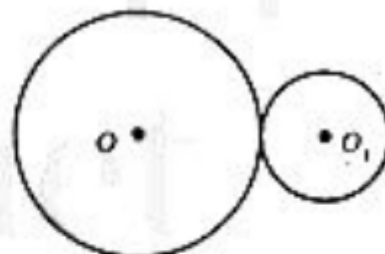


3) Дотикаються внутрішньо ($R = 16 \text{ см}$, $r = 12 \text{ см}$).

$OO_1 = 4 \text{ см}$.

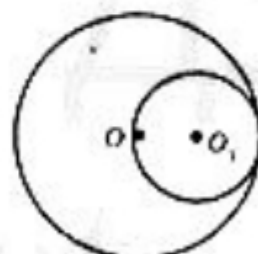


603. а)

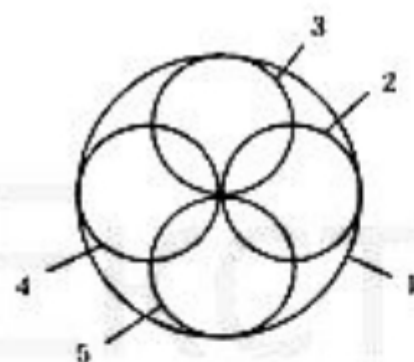


Якщо $R = 6 \text{ см}$, $r = 4 \text{ см}$, то $OO_1 = R + r = 6 \text{ см} + 4 \text{ см} = 10 \text{ см}$.

б) $OO_1 = 6 \text{ см} - 4 \text{ см} = 2 \text{ см}$.

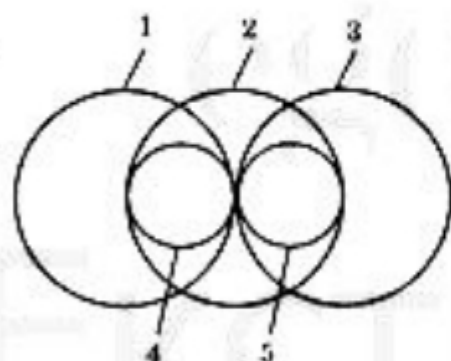


Мал. 345.



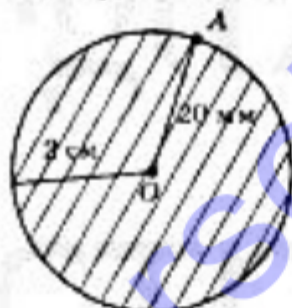
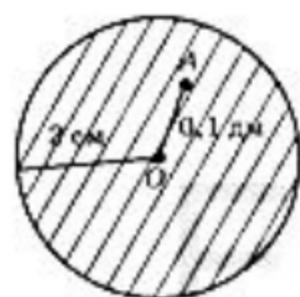
Кола 2 і 4, 3 і 5 дотикаються (зовнішній дотик).

Мал. 346.

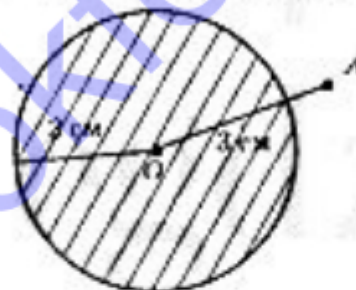
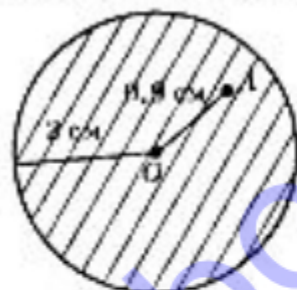


Кола 1 і 2, 2 і 3 перетинаються.
Кола 2 і 5, 2 і 4 мають внутрішній дотик.
Кола 1 і 3, 5 і 4 мають зовнішній дотик.

605. 1) Всередині круга. 2) На колі.

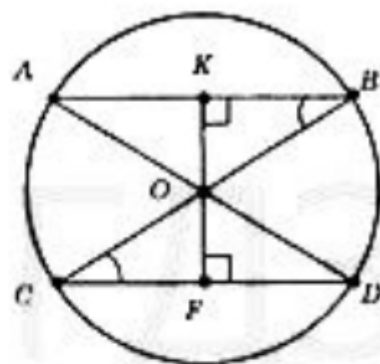
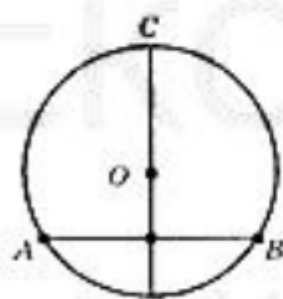


3) Всередині круга. 4) Поза кругом.



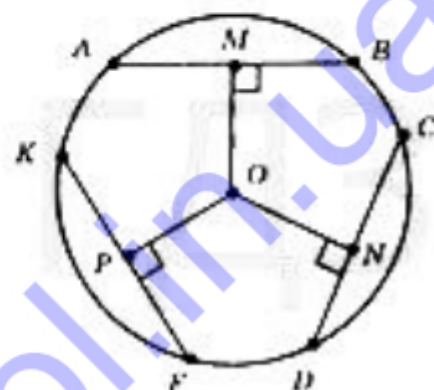
606. Не можуть.

607.



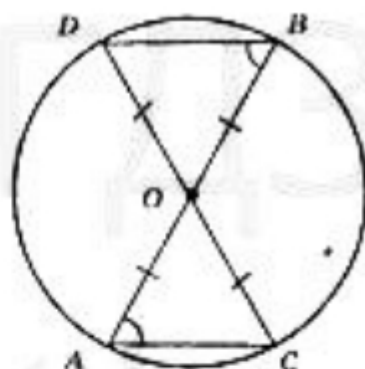
Оскільки $\triangle KOB = \triangle FOC$ ($\angle B = \angle C$ — внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих AB і CD і січній BC , $BO = CO$, $\angle OKB = \angle OFC = 90^\circ$), то $OK = OF$. Отже, $OF = 10$ см.

609.



Оскільки $AB = CD = KF$, $OM \perp AB$, $ON \perp CD$, $OP \perp KF$, то $MO = ON = OP = 6$ см.

610.



$\triangle AOC = \triangle BOD$ (оскільки $AO = BO$, $CO = DO$, $\angle AOC = \angle BOD$), то $AC = BD$ і $\angle OAC = \angle OBD$.

Оскільки кути OAC і OBD — внутрішні різносторонні при прямих DB і AC та січній AB і рівні, то $AC \parallel BD$.

611.

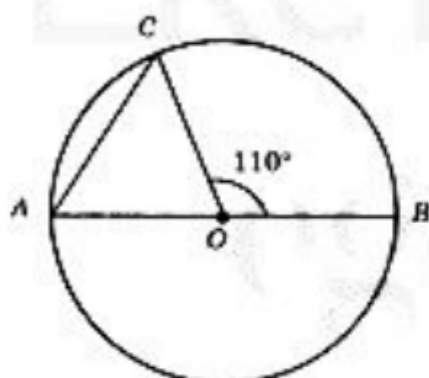


$AD = 3$ см, $CD = 8$ см.

$P_{\text{шир}} = OC + BC + OB - (OC + OB) + BC = AB + BC$. Оскільки $AB = CD$, $BC = AD$, то $P_{\text{шир}} = AD + CD = 3$ см + 8 см = 11 см.

Відповідь: 11 см.

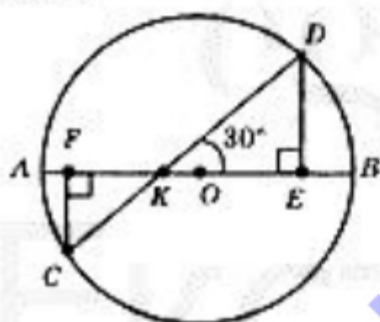
612.



$\angle AOC = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$, $\triangle AOC$ — рівнобедрений, отже, $\angle ACO = \angle CAO = \frac{180^\circ - \angle AOC}{2} = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ$.

Відповідь: 55° .

613.



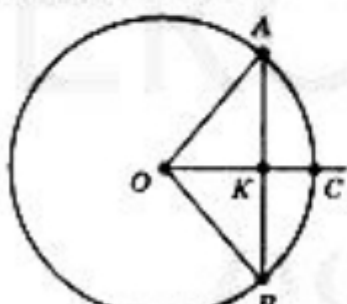
$CK = 6$ см, $DK = 12$ см, $CF \perp AB$, $DE \perp AB$, $\angle DKE = 30^\circ$.

З прямокутного трикутника KDE : $DE = \frac{1}{2} DK = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ (см).

З прямокутного $\triangle FKC$: $FC = \frac{1}{2} CK = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ (см).

Відповідь: 6 см, 3 см.

614.



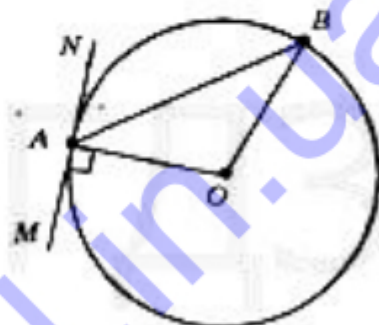
З прямокутного $\triangle BOK$ маємо: $\angle OBK = 30^\circ$ (оскільки $OB = 2OK$).

З $\triangle AOB$: $\angle AOB = 180^\circ - \angle OAK - \angle OBK = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$.

Відповідь: 120° .

615. Ні. Оскільки дотична перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику, то припустивши, що коло дотикається до прямої в двох точках, отримаємо, що з центра кола до прямої можна провести два перпендикуляри, що неможливо.

616.



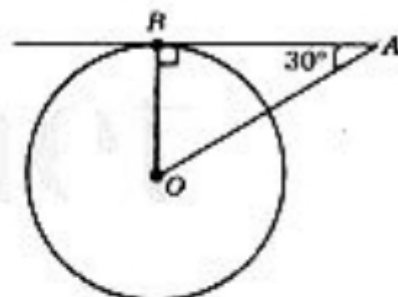
1) Якщо $\angle AOB = 70^\circ$, то $\angle BAO = \angle ABO = \frac{180^\circ - \angle AOB}{2} = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ$.

Тоді $\angle NAB = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$.

2) Якщо $AB = AO$, то $\triangle AOB$ — рівносторонній і $\angle BAO = 60^\circ$. Тоді $\angle NAB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Відповідь: 1) 35° ; 2) 30° .

617.



Оскільки $OB \perp AB$, $\angle BAO = 30^\circ$, $AO = 8$ см, то $BO = \frac{1}{2} AO = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$ (см).

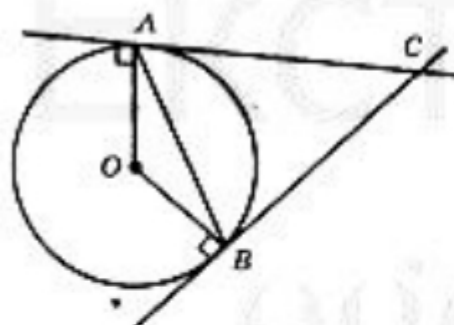
Відповідь: 4 см.

618.



Оскільки B і C — точки дотику, то $OB \perp AB$, $OC \perp AC$. $\triangle ABO = \triangle ACO$ (за катетом і гіпотенузою: $OB = OC$ — як радіуси, OA — спільна гіпотенуза), тоді $AB = AC$.

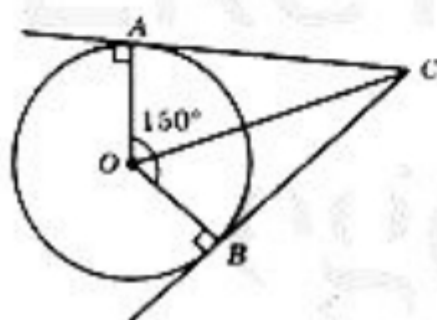
619.



Згідно з результатами задачі 318: $AC = BC$. За умовою $AB = AC$, отже, $\triangle ABC$ — рівносторонній і $\angle CAB = \angle ABC = \angle BCA = 60^\circ$.

Відповідь: $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$.

620.



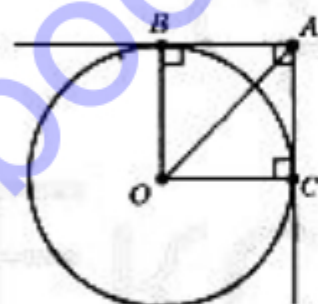
$\triangle AOC = \triangle BOC$ (за гіпотенузою OC і катетом $AO = OB$).

$\angle AOC = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 150^\circ = 75^\circ$. $\angle ACO = \angle BCO = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$.

Тоді $\angle ACB = \angle ACO + \angle BCO = 15^\circ + 15^\circ = 30^\circ$.

Відповідь: 30° .

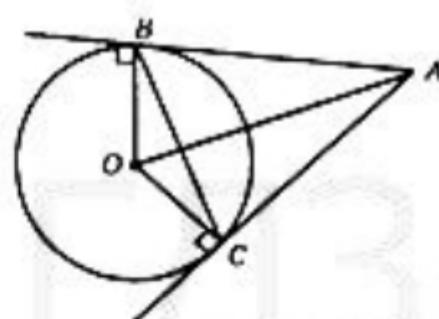
621.



$\triangle BAO = \triangle CAO$ (за гіпотенузою і катетом: OA — спільна, $OB = OC$).

$\angle BAO = \angle CAO = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$, тоді $\angle BOA =$

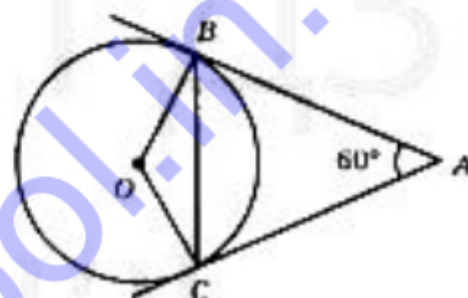
622.



1) Оскільки $\triangle ABC$ — рівнобедрений ($AB = AC$) і $\angle BAC = 60^\circ$, то $\triangle ABC$ — рівносторонній. Отже, $BC = AB = AC$.

2) Оскільки $\triangle OBA = \triangle OCA$, то $\angle OAB = \angle OAC = 30^\circ$. Із прямокутного трикутника ABO ($\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$) маємо: $OA = 2 \times OB$, тобто відрізок OA дорівнює діаметру.

623.

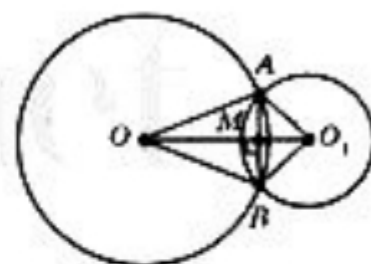


1) Оскільки $AB = BC = AC$ (задача 622), і якщо $AB = 4$ см, то $BC = 4$ см.

2) Оскільки $AB = BC = AC$ (задача 622), то якщо $AB + AC = 10$ см, $AB = AC = \frac{10}{2} = 5$ (см). Отже, $BC = AB = AC = 5$ см.

Відповідь: 1) 4 см; 2) 5 см.

624.

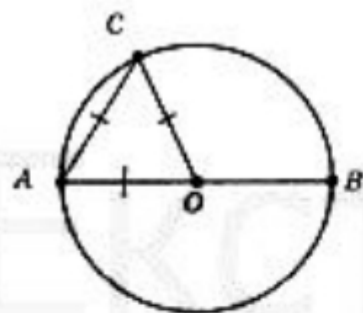


1) $\triangle AOO_1 = \triangle BOO_1$ за трьома сторонами ($OA = OB$ — як радіуси, $O_1A_1 = O_1B_1$ — як радіуси, OO_1 — спільна сторона).

Із рівності цих трикутників маємо: $\angle AOO_1 = \angle BOO_1$.

2) $\triangle OAB$ — рівнобедрений, тоді кути при

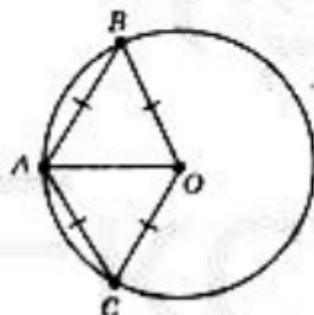
625.



Оскільки $AC = AO = CO$, то $\triangle AOC$ — рівносторонній. Отже, $\angle CAO = 60^\circ$.

Відповідь: 60° .

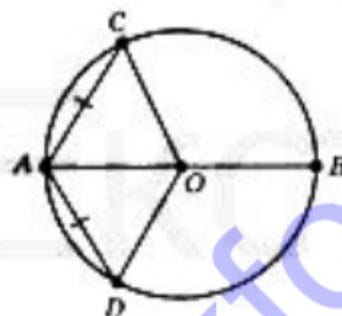
626.



Оскільки $AB = BO = AO = AC = CO$, то $\triangle ABO$ і $\triangle ACO$ — рівносторонні. Отже, $\angle BAO = 60^\circ$, $\angle CAO = 60^\circ$. Тоді $\angle BAC = \angle BAO + \angle CAO = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$.

Відповідь: 120° .

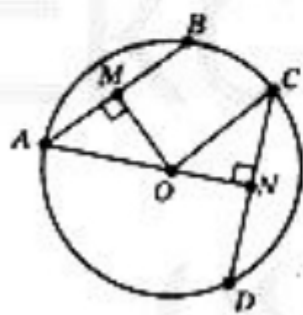
627.



Нехай AB — діаметр, $AC = AD$. Доведемо, що $\angle CAO = \angle DAO$.

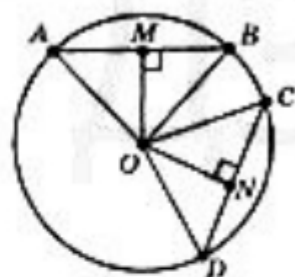
$\triangle CAO = \triangle DAO$ за трьома сторонами ($CO = DO$ — як радіуси, $AC = AD$ — за умовою, AO — спільна сторона). Із рівності цих трикутників випливає, що $\angle CAO = \angle DAO$.

628.



$\triangle OMA = \triangle ONC$ за гіпотенузою і катетом ($OA = OC$ — як радіуси, $AM = CN$ — як половини рівних хорд), тоді $OM = ON$.

629.



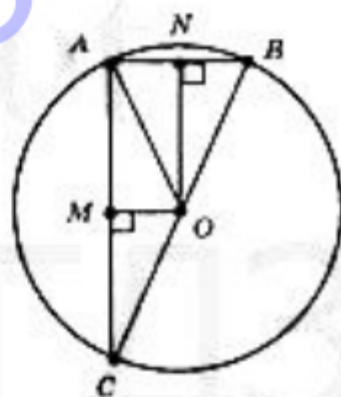
Якщо хорди рівновіддалені від центра кола, то вони рівні.

Нехай $OM \perp AB$, $ON \perp CD$, $OM = ON$. Доведемо, що $AB = CD$.

Оскільки $OM \perp AB$, $ON \perp CD$, то $AM = MB$, $CN = ND$.

$\triangle AOM = \triangle CON$ за гіпотенузою і катетом ($AO = CO$ — як радіуси, $OM = ON$ — за умовою), тоді $AM = CN$. Отже, $AB = 2AM = 2CN = CD$.

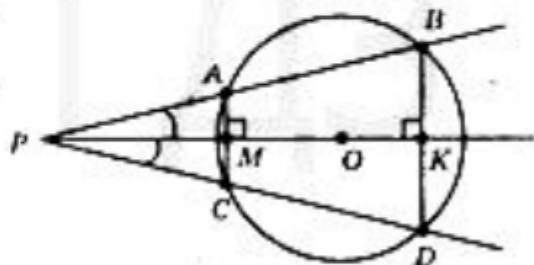
630.



$OM \perp AC$, $OM = 10$ см, $ON \perp AB$, $ON = 30$ см, $\triangle AMO = \triangle ONA$ за гіпотенузою і гострим кутом). Із рівності трикутників випливає, що $AM = ON$, $MO = AN$. Тоді $AC = 2 \times ON = 2 \times 30$ см = 60 см, $AB = 2 \times OM = 2 \times 10$ см = 20 см.

Відповідь: 60 см, 20 см.

631.



PO — бісектриса кута $\angle BPD$, $\angle BPO = \angle DPO$.

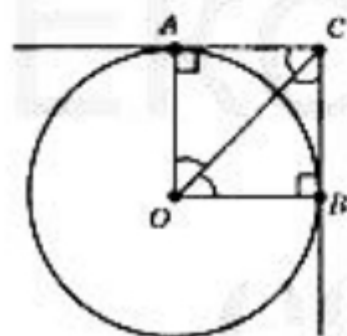
$\triangle PAM = \triangle PCM$ (за катетом і гострим кутом: PM — спільний катет, $\angle APM = \angle CPM$), тоді $PA = PC$.

Отже, $AB = PB - PA$, $CD = PD - PC$. Оскільки $PB = PD$, $PA = PC$, то $AB = CD$.

632. Оскільки $AB \parallel CD$, то $\angle ANM + \angle CMN = 180^\circ$ (як сума внутрішніх односторонніх кутів при паралельних прямих і січній MN). NO — бісектриса кута ANM , MO — бісектриса кута CMN , тоді

$$\begin{aligned} \angle ONM + \angle OMN &= \frac{1}{2} \angle ANM + \frac{1}{2} \angle CMN = \\ &= \frac{1}{2} (\angle ANM + \angle CMN) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ. \end{aligned}$$

633.

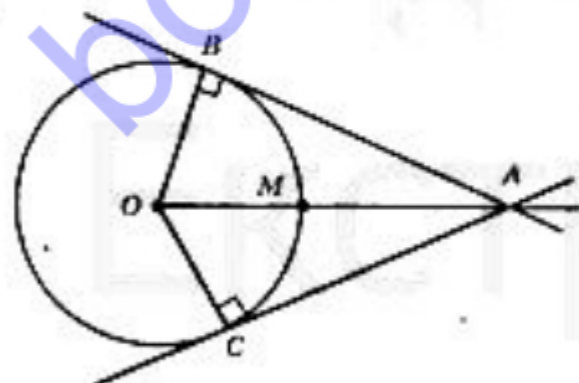


Оскільки $\triangle ACB = \triangle AOB$ і $\triangle AOC = \triangle BOC$, то $\angle ACO = \angle BCO = \frac{1}{2} \angle ACB$.

$$\begin{aligned} \angle AOC = \angle BOC &= \frac{1}{2} \angle AOB, \text{ тоді } \angle ACO = \\ &= \angle BCO = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ. \end{aligned}$$

Тоді $\angle AOB = 2 \times \angle AOC = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$.
Відповідь: 90° .

634.



$OB \perp AB$, $OC \perp AC$, $AM = MO$

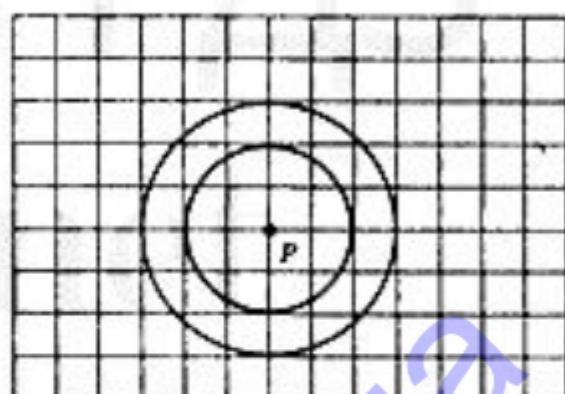
§ 18. Геометричне місце точок

638. Мал. 358. Коло.

Мал. 359. Бісектриса кута.

Мал. 360. Серединний перпендикуляр.

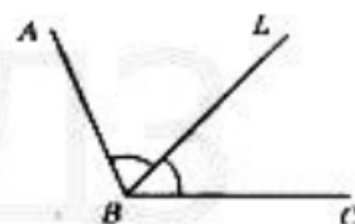
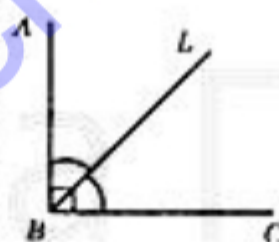
639.



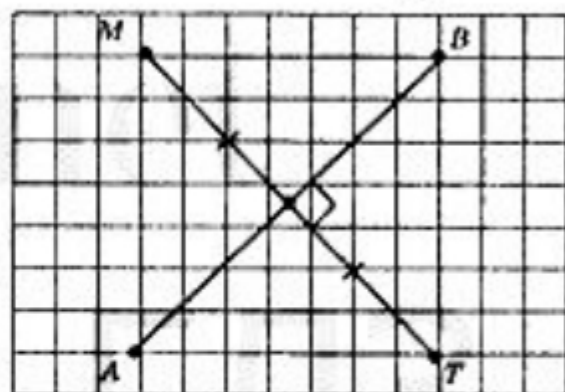
1) Коло з центром P і радіусом 2 клітинки.

2) Коло з центром P і радіусом 3 клітинки.

640.



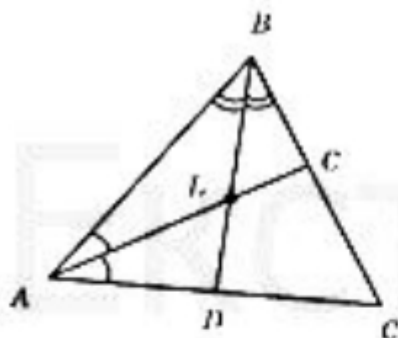
641.



642. 1) Ні (це коло); 2) ні (це точки поза колом); 3) ні (це точки всередині кола); 4) так; 5) ні (це коло і точки поза колом).

643. Ні.

646.

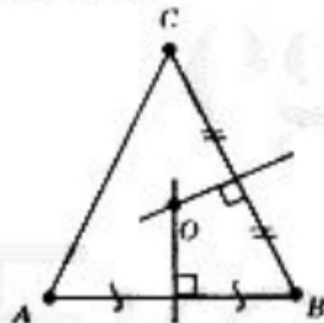


Точка L — рівновіддалена від сторін трикутника.

647. Ні, оскільки існують точки, які не належать променю OM (точки, що лежать на доповняльному промені до променя OM), які теж рівновіддалені від кінців відрізка AB .

648. Промінь AB не можна вважати геометричним місцем точок, які лежать між точками A і B , бо точки променя AB , які лежать поза відрізком AB , не мають такої властивості.

649.



Точка O рівновіддалена від вершин A , B , C трикутника ABC .

650.



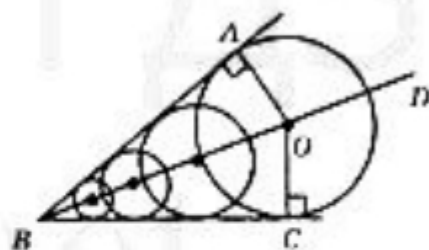
Геометричним місцем центрів кіл з радіусом R , що проходить через дану точку A , є коло з центром у точці A і з радіусом R .

651.



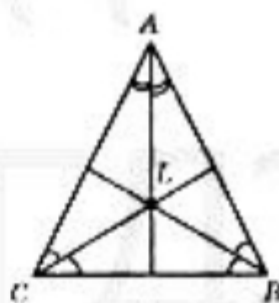
Геометричним місцем центрів кіл з радіусом R , що дотикаються до даного кола з радіусом r , є коло з центром, що співпадає з центром кола радіуса r , і з радіусом $R + r$.

652.



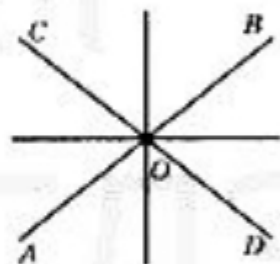
Нехай коло з центром O дотикається до сторін кута в точках A і C , тоді O рівновіддалена від сторін кута, оскільки $OA \perp AB$, $OC \perp BC$ і $OA = OC$. Отже, точка O лежить на бісектрисі BD кута ABC . Якщо точка O лежить на бісектрисі BD кута B , то існує коло з центром O , яке дотикається до сторін кута в точках A і C ($OA \perp AB$, $OC \perp BC$). Отже, геометричним місцем центрів кіл, що дотикаються до сторін кута, є бісектриса цього кута.

653.



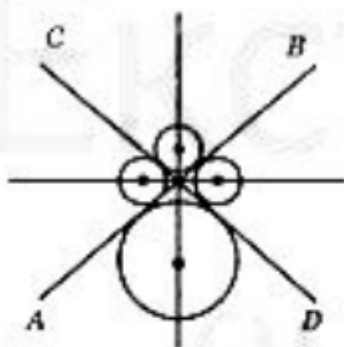
Геометричним місцем точок, рівновіддалених від усіх сторін кута, є точка перетину бісектрис трикутника.

654.

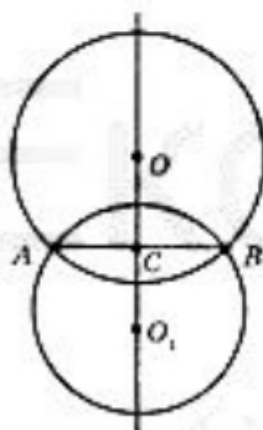


Геометричним місцем точок, рівновіддалених від двох прямих, є дві перпендикулярні прямі, які проходять через точку перетину цих прямих і є бісектрисами кутів, що утворились при перетині да-

прямі, які проходять через точку перетину прямих і містять бісектриси кутів, що утворилися при перетині цих прямих.



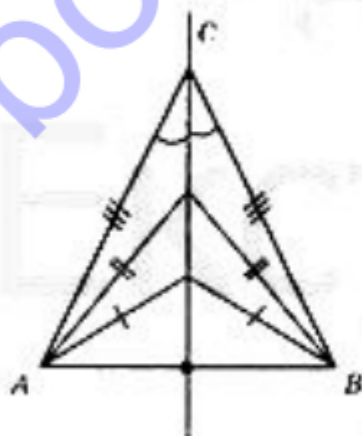
656.



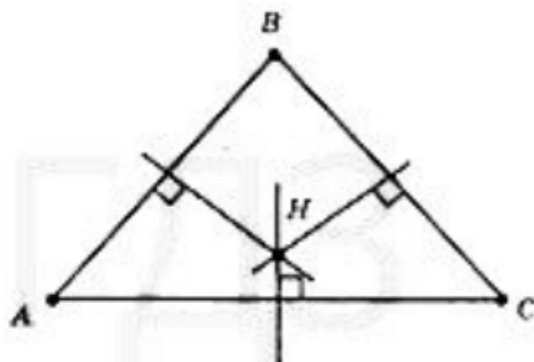
Нехай коло з центром O проходить через точки A і B , тоді $OC \perp AB$, $AC = CB$, отже, точка O лежить на серединному перпендикулярі.

Якщо точка O лежить на серединному перпендикулярі OC , то існує коло з центром O , яке проходить через точки A і B . Отже, геометричним місцем центрів кіл, які проходять через дані точки A і B , є серединний перпендикуляр до відрізка AB .

657.

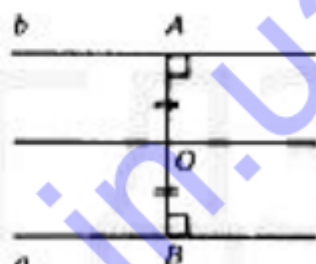


658.



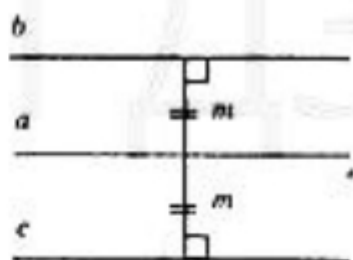
Геометричним місцем точок, рівновіддалених від усіх вершин трикутника, є точка перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника.

659.



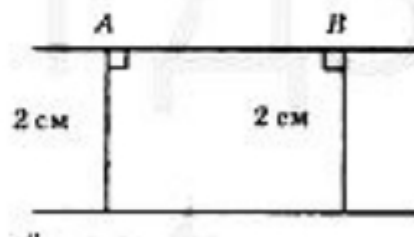
Геометричним місцем точок, рівновіддалених від двох паралельних прямих, є пряма, яка паралельна даним прямим і проходить через середину відрізка, перпендикулярного даним прямим і з кінцями на даних прямим.

660.

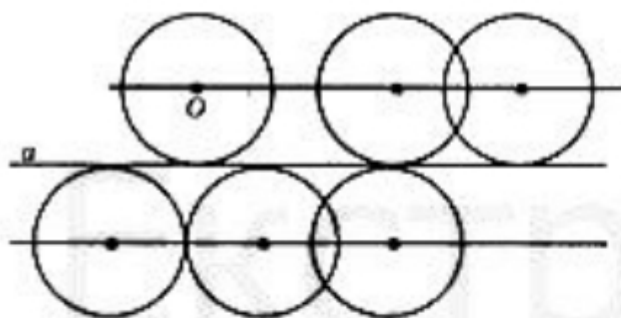


Геометричним місцем точок, віддалених від прямої a на відстань m , є дві прямі, які лежать по різні сторони від прямої a , які паралельні прямій a і знаходяться від прямої a на відстані m .

661.

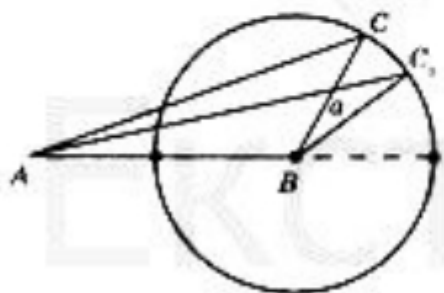


662.



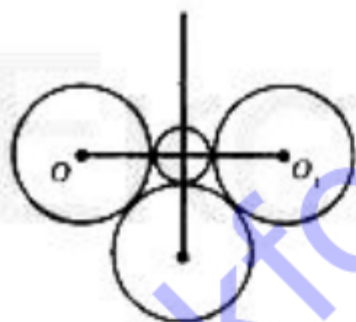
Геометричним місцем центрів кіл радіуса R , що дотикаються до прямої a , є дві прямі (які лежать по різні боки від прямої a), які паралельні прямій a і віддалені від прямої a на R .

663.



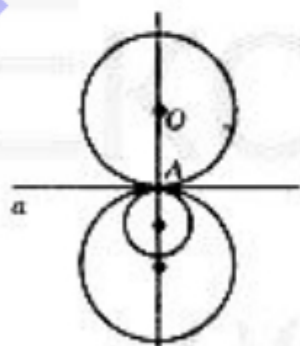
Геометричним місцем вершин трикутників зі спільною стороною AB і бічною стороною, що дорівнює a , є коло з центром у точці B і з радіусом a , за винятком двох точок перетину прямої AB та кола.

664.

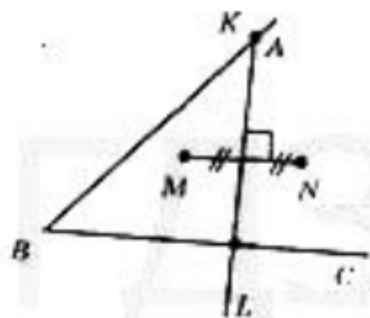


Геометричним місцем центрів кіл, які дотикаються до двох даних кіл з центрами в точках O і O_1 і рівними радіусами, є серединний перпендикуляр до відрізка OO_1 .

665.



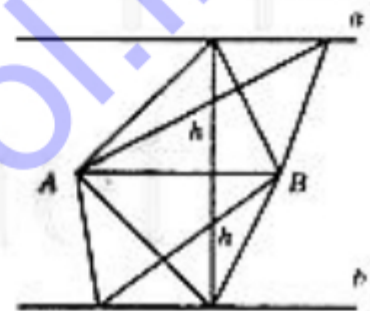
666.



Шукані точки K і L — це точки перетину серединного перпендикуляра до відрізка MN і сторін кута.

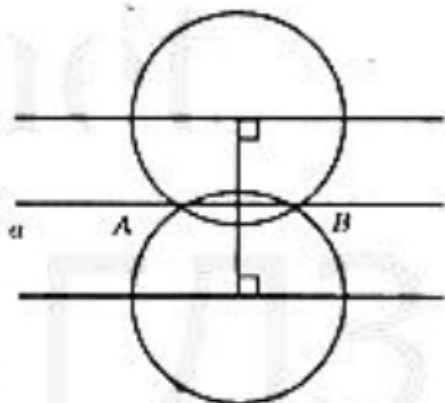
Задача має один розв'язок, якщо серединний перпендикуляр до MN паралельний одній зі сторін кута або збігається з бісектрисою кута ABC . В усіх інших випадках задача має два розв'язки.

667.



Геометричним місцем вершин трикутників, що мають спільну основу AB і однакову висота h , проведену до цієї сторони, є дві прямі, які паралельні AB і знаходяться на відстані h від AB .

668.



Геометричним місцем центрів кіл радіуса R , які відтисують на даній прямій a хорду даної довжини l , є:

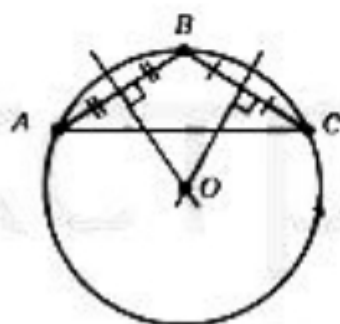
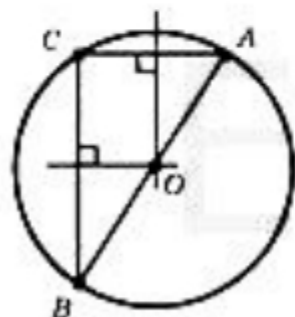
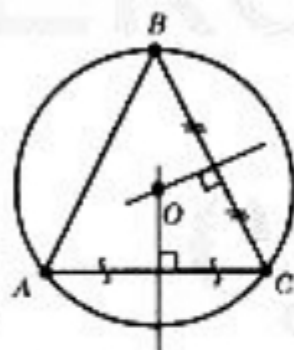
1) дві прямі, паралельні даній прямій.

§ 19. Описані і вписані кола

671. Коло, описане навколо трикутника, зображено на мал. 372.

672. Коло, вписане у трикутник, зображено на мал. 375.

673.

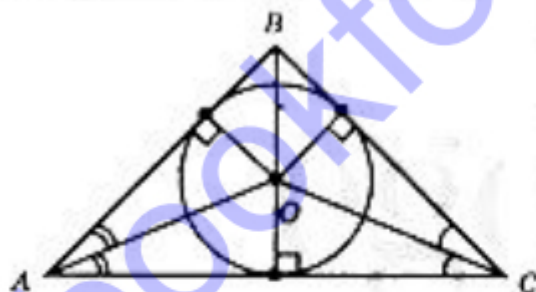


Центр кола, описаного навколо гострокутного трикутника, лежить всередині трикутника.

Центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, лежить на середині гіпотенузи.

Центр кола, описаного навколо тупокутного трикутника, лежить поза трикутником.

674.

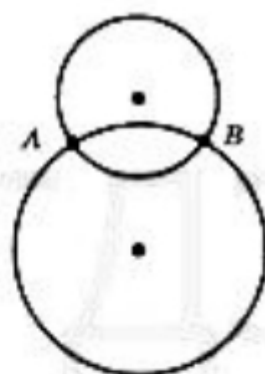


675. Центр кола розміщений у точці перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника ABC (достатньо побудувати точку перетину двох серединних перпендикулярів).

676. 1)

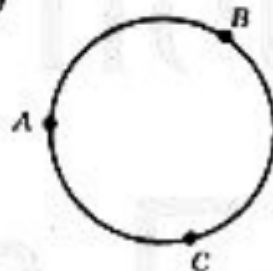


2)



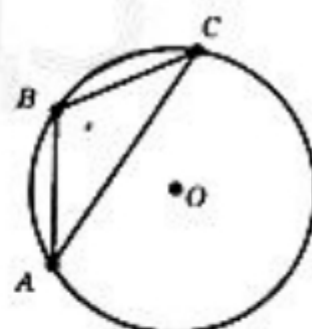
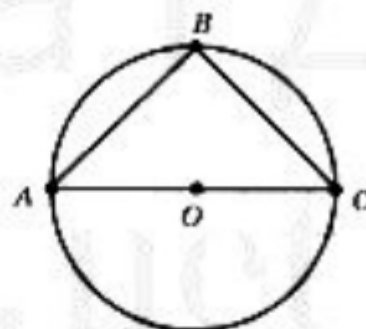
Через дві точки можна провести безліч кіл.

3)



Через три точки можна провести одне коло, або жодного, якщо точки лежать на одній прямій.

677.

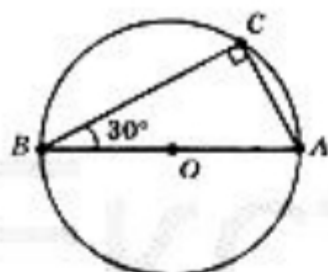


678. Так, бо прямі, що містять медіани рівностороннього трикутника, є серединними перпендикулярами до сторін трикутника.

679. Радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника, дорівнює половині гіпотенузи.

$$1) R = \frac{a}{2} = \frac{2 \text{ см}}{2} = 1 \text{ см};$$

680.

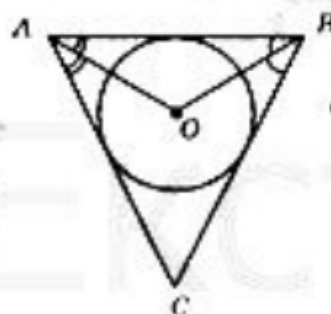


Оскільки $AC = 10$ см, то $AB = 2AC = 2 \times 10$ см $= 20$ см.

Тоді $OA = \frac{AB}{2} = \frac{20 \text{ см}}{2} = 10$ см.

Відповідь: 10 см.

681.



$$1) \angle ABO = \frac{1}{2} \angle B = \frac{1}{2} \cdot 70^\circ = 35^\circ;$$

$$\angle CBO = \angle ABO = 35^\circ;$$

$$\angle CAO = \frac{1}{2} \angle A = \frac{1}{2} \cdot 50^\circ = 25^\circ;$$

$$2) \angle ABO = \frac{1}{2} \angle B = \frac{1}{2} \cdot 40^\circ = 20^\circ;$$

$$\angle CBO = \angle ABO = 20^\circ;$$

$$\angle CAO = \frac{1}{2} \angle A = \frac{1}{2} \cdot 40^\circ = 20^\circ;$$

$$3) \angle ABO = \frac{1}{2} \angle B = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ;$$

$$\angle CBO = \angle ABO = 30^\circ;$$

$$\angle CAO = \frac{1}{2} \angle A = \frac{1}{2} \cdot 30^\circ = 15^\circ;$$

$$4) \angle ABO = \frac{1}{2} \angle B = \frac{1}{2} \cdot \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 30^\circ = 15^\circ; \angle CBO = \angle ABO = 15^\circ;$$

$$\angle CAO = \frac{1}{2} \angle A = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ.$$

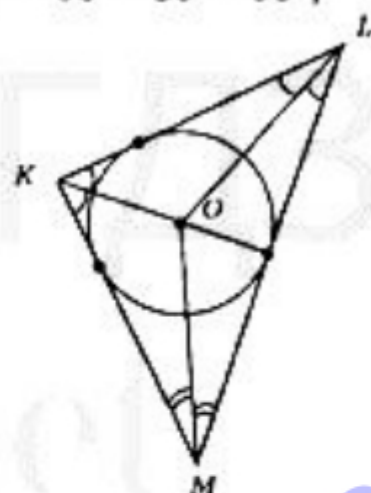
$$682. 1) \angle K = 2 \times \angle OKL = 2 \times 25^\circ = 50^\circ;$$

$$\angle L = 2 \times \angle OLM = 2 \times 30^\circ = 60^\circ;$$

$$\angle M = 180^\circ - \angle K - \angle L = 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ;$$

$$\angle M = 2 \times \angle OMK = 30^\circ;$$

$$\angle K = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ;$$

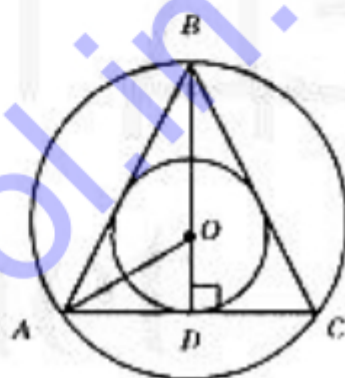


$$4) \angle L = 2 \times \angle OLK = 2 \times 15^\circ = 30^\circ;$$

$$\angle K = 2 \times \angle OKM = 2 \times 15^\circ = 30^\circ;$$

$$\angle M = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ.$$

683.

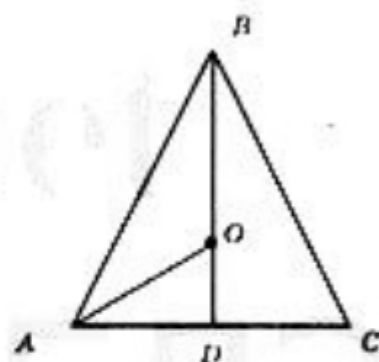


$\triangle AOD$ — прямокутний.

$$\angle OAD = \frac{1}{2} \angle A = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ, \text{ тоді}$$

$$\frac{AD}{OD} = 2 \text{ або } \frac{OD}{AO} = \frac{1}{2}.$$

684.



Оскільки $OB = AO = R$, а $OD = r$, то $BD = BO + OD = R + r$.

685.



Радіус кола, описаного навколо рівностороннього трикутника, дорівнює $\frac{2}{3}$ його висоти. $R = \frac{2h}{3}$.

$$1) R = \frac{2 \cdot 12}{3} = 18 \text{ (см);}$$

$$2) R = \frac{2 \cdot 24}{3} = 16 \text{ (см);}$$

$$3) R = \frac{2 \cdot 36}{3} = 24 \text{ (см);} \quad 4) R = \frac{2h}{3}.$$

686. Радіус кола, вписаного в рівносторонній трикутник, дорівнює $\frac{1}{3}$ висоти:

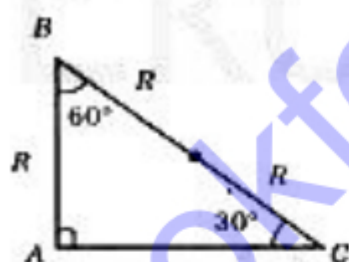
$$\frac{h}{3}.$$

$$1) r = \frac{9}{3} = 3 \text{ (см);} \quad 2) r = \frac{18}{3} = 6 \text{ (см);}$$

$$3) r = \frac{36}{3} = 12 \text{ (см);} \quad 4) r = \frac{h}{3}.$$

687. Точка перетину серединних перпендикулярів двох сторін трикутника лежить на його третій стороні, якщо цей трикутник прямокутний.

688.



Так, якщо один із кутів дорівнює 30° .

689.



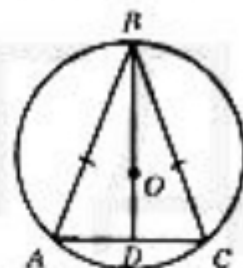
$\triangle BMC$ — рівнобедрений ($BM = MC$).
 $\angle MBC = 45^\circ - 10^\circ = 35^\circ$, $\angle C = \angle MBC = 35^\circ$.
 $\angle A = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.

690.

B

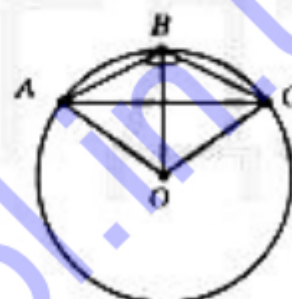
$\triangle ABO$ і $\triangle BOC$ — рівносторонні, тому $R = BO = BC = AB = AO = 6$ см.

691.



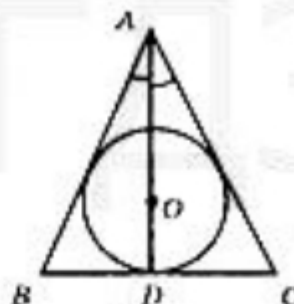
Нехай $\triangle ABC$ — рівнобедрений ($AB = BC$).
 Проведемо серединний перпендикуляр до основи AC , тоді центр кола, описаного навколо трикутника ABC , буде лежати на прямій BD . Оскільки $BD \perp AC$, то BD — бісектриса кута B .

692.



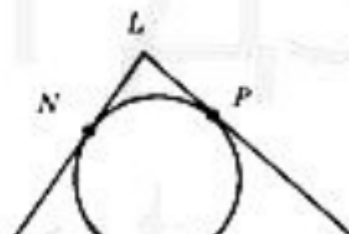
$AB = BC = 4$ см. $\angle ABC = 120^\circ$. Оскільки $\triangle BOC = \triangle ABO$ і ці трикутники рівносторонні, то $R = AO = BO = CO = BC = AB = 4$ см.

693.



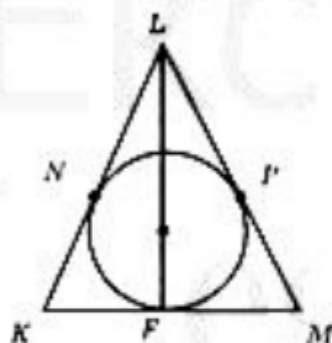
Нехай $\triangle ABC$ — рівнобедрений ($AB = AC$).
 Проведемо бісектрису кута A (кута, протилежного до основи), на якій лежить центр O — кола, вписаного у трикутник ABC . Оскільки AD — бісектриса рівнобедреного трикутника, то AD — медіана.

694.



$KL = KN + NL = 8 + 4 = 12$ (см); $LM =$
 $= KL = 12$ см. $KM = 2KF = 2 \times 8 = 16$ (см).
 $P_{\triangle KLM} = 12 + 12 + 16 = 40$ (см).
 Відповідь: 40 см.

695.



$\triangle KLM$ — рівнобедрений, $KL = LM$, $N, P,$
 F — точки дотику.

$KN : NL = 5 : 7$, $KM = 10$ см.

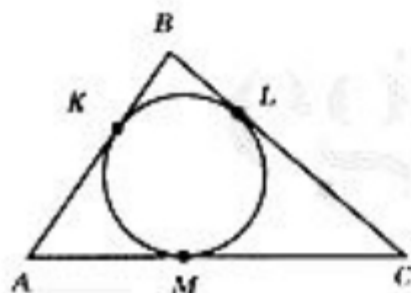
$KF = FM = 10 \text{ см} : 2 = 5$ см. $KN = KF = 5$ см;

$NL = 7$ см; $KL = 12$ см; $LM = 12$ см.

$P_{\triangle KLM} = 12 + 12 + 10 = 34$ (см).

Відповідь: 34 см.

696.



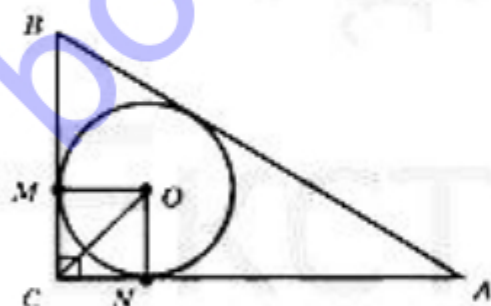
K, L, M — точки дотику, $KB = 4$ см,
 $AK = 5$ см, $MC = 6$ см.

$AB = AK + KB = 5 \text{ см} + 4 \text{ см} = 9$ см.

$BL = BK = 4$ см, $LC = MC = 6$ см, $BC =$
 $= BL + LC = 4 \text{ см} + 6 \text{ см} = 10$ см, $AM =$
 $= AK = 5$ см, $AC = 5 \text{ см} + 6 \text{ см} = 11$ см.

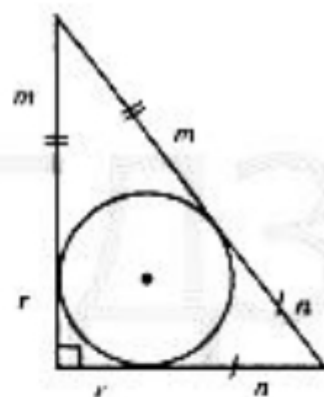
Відповідь: 9 см, 10 см, 11 см.

697.



Оскільки CO — бісектриса кута C , то
 $\angle BCO = \angle ACO = 45^\circ$.

$\triangle COM$ і $\triangle CON$ — прямокутні і рівнобе-



1) $2 \times (4 + 6 + 2) = 2 \times 12 = 24$ (см);

2) $2 \times (3 + 10 + 2) = 2 \times 15 = 30$ (см);

3) $2 \times (5 + 12 + 3) = 2 \times 20 = 40$ (см);

4) $2 \times (4 + 21 + 3) = 2 \times 28 = 56$ (см).

699.



Нехай O — середина гіпотенузи AC ,
 BO — медіана трикутника ABC . Продов-
 жимо її так, що $DO = BO$.

$\triangle AOB = \triangle COD$ (за першою ознакою рів-
 ності трикутників: $AO = CO$, $BO = OD$,
 $\angle AOB = \angle COD$ — як вертикальні кути).
 Із рівності трикутників маємо: $AB = CD$,
 $\angle BAO = \angle DCO$.

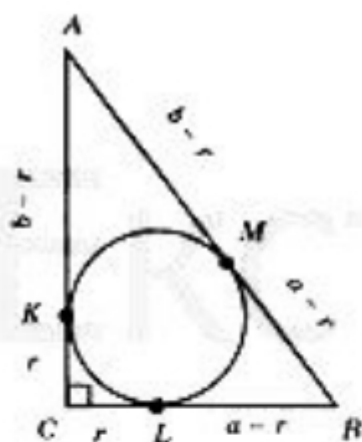
Оскільки $\angle BAO = \angle DCO$ і ці кути вну-
 трішні різносторонні при прямих AB
 і CD і січній AC , то прями AB і CD па-
 ралельні. Оскільки $AB \perp BC$ і $DC \parallel AB$, то
 $DC \perp BC$.

$\triangle ABC = \triangle DCB$, тоді $AC = DB$. Звідси

$\frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} DB$, тобто $AO = BO$.

Оскільки $AO = BO = CO$, то O — центр
 кола, описаного навколо трикутника
 ABC .

700. Нехай $AC = b$, $CB = a$, $AB = c$. $K,$
 L, M — точки дотику, тоді $KC = CL = r$,



701. 1) $m = \frac{24 \cdot 3}{3+4+5} = 6 \text{ (см)},$

$n = \frac{24 \cdot 4}{3+4+5} = 8 \text{ (см)},$

$k = \frac{24 \cdot 5}{3+4+5} = 10 \text{ (см)},$

$r = \frac{m+n+k}{2} = \frac{6+8+10}{2} = 2 \text{ (см)};$

2) $m = \frac{12 \cdot 8}{8+15+17} = \frac{12 \cdot 8}{40} = 2,4 \text{ (дм)},$

$n = \frac{12 \cdot 15}{8+15+17} = \frac{12 \cdot 15}{40} = 4,5 \text{ (дм)},$

$k = \frac{12 \cdot 17}{8+15+17} = \frac{12 \cdot 17}{40} = 5,1 \text{ (дм)},$

$r = \frac{m+n+k}{2} = \frac{2,4+4,5+5,1}{2} = \frac{1,8}{2} = 0,9 \text{ (дм)};$

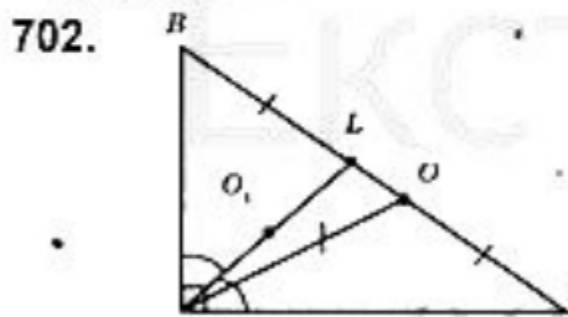
3) $m = \frac{0,6}{5+12+13} = \frac{0,6 \cdot 5}{30} = 0,1 \text{ (у)},$

$n = \frac{0,6 \cdot 12}{30} = 0,24 \text{ (у)},$

$k = \frac{0,6 \cdot 13}{30} = 0,26 \text{ (у)},$

$r = \frac{m+n+k}{2} = \frac{0,1+0,24+0,26}{2} = \frac{0,08}{2} =$

$= 0,04 \text{ (м)}.$

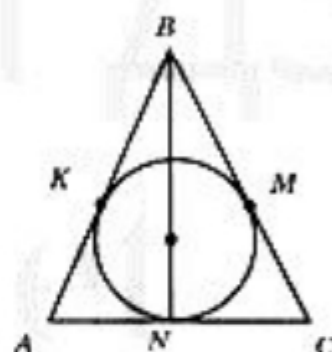


$\triangle AOC$ — рівнобедрений ($AO = OC$),
 $\angle OAC = \angle OCA = 45^\circ - 7^\circ = 38^\circ$.

$\triangle BOA$ — рівнобедрений ($AO = OB$).
 $\angle ABO = \angle BAO = 45^\circ + 7^\circ = 52^\circ$.

Відповідь: $38^\circ, 52^\circ$.

703.

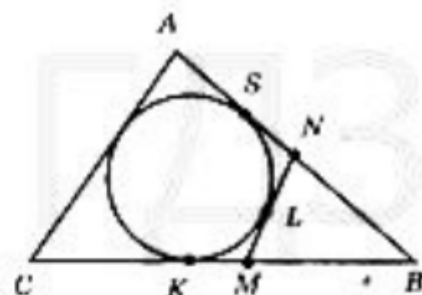


Оскільки $AK = AN$, $BM = BK$, $CN = CM$,
 то додавши почленно три рівності, одержимо:
 $AK + BM + CN = AN + BK + CM$.

704. Оскільки $P = AB + BC + AC =$
 $= (AK + KB) + BC + (AN + CN) = AK + BC +$
 $+ (KB + CN) + AN = AK + BC + (MB +$
 $+ MC) + AN = AK + BC + BC + AN =$
 $= AK + 2BC + AN$.

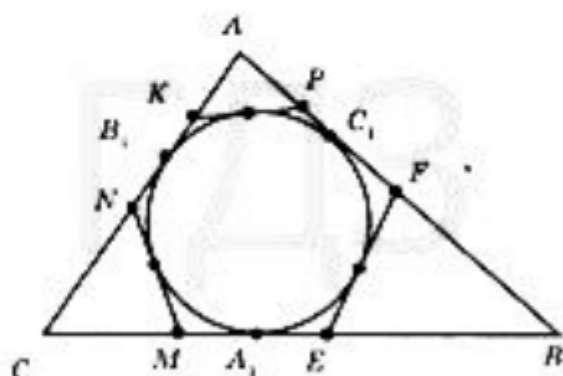
Враховуючи, що $AK = AN$, $P = 2p$, маємо:
 $2p = 2AK + 2BC$, $p = AK + BC$, $AK = p - BC$.
 Отже, $AK = AN = p - BC$.

705.



$P_{\triangle BMN} = MN + NB + MB = NL + LM +$
 $+ NB + MB = SN + KM + NB + MB = (SN +$
 $+ NB) + (KM + MB) = SB + KB = AB = a$.

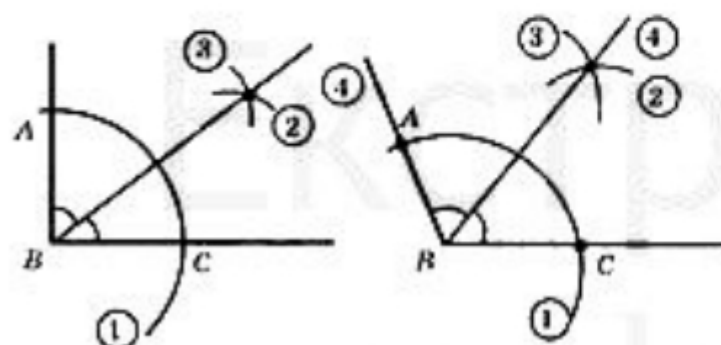
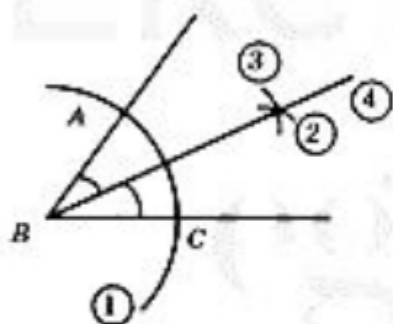
706.



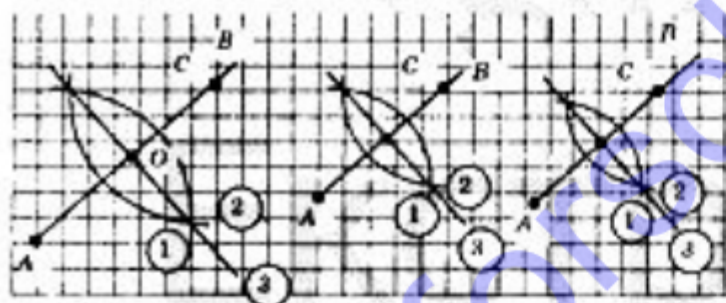
§ 20. Найпростіші задачі на побудову

708. Щоб побудувати трикутник, що дорівнює трикутнику ABC , треба провести три кола радіусами 5 см, 6 см і 9 см.

709.



710.

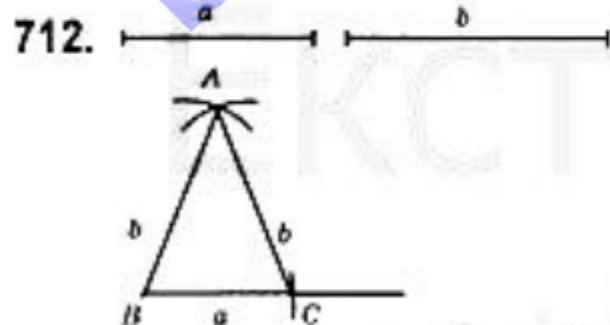


1) $AC = 5$ см; 2) $AC = 0,35$ дм; 3) $AC = 43$ мм.

711. 1) Будуємо відрізок $AB = a$.

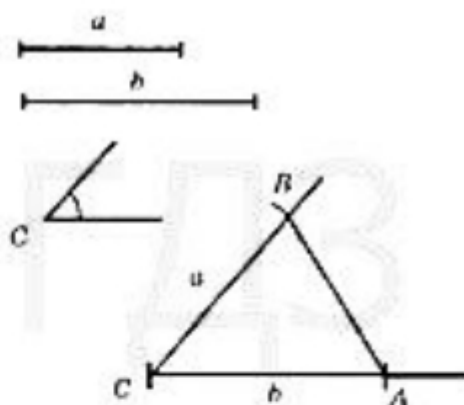
2) Будуємо кола з центрами в точках A і B і з радіусом a , які перетинаються в точці C .

3) Будуємо сторони AC і BC .



План:

713.



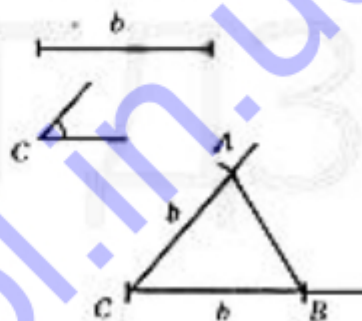
План:

1) Будуємо $\angle C$.

2) На сторонах кута C відкладаємо відрізки $CB = a$, $CA = b$.

3) $\triangle ABC$ — шуканий.

714.



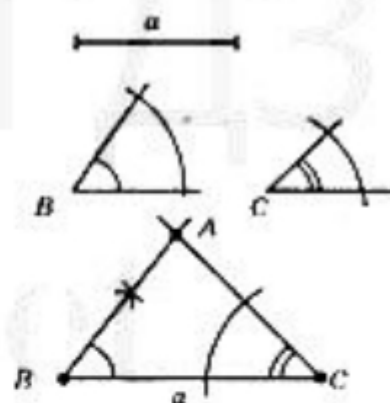
План:

1) Будуємо $\angle C$;

2) На сторонах кута C відкладаємо відрізки $CA = CB = b$;

3) $\triangle ABC$ — шуканий.

715.



План:

1) Будуємо $\angle B$;

2) На одній стороні відкладемо відрізок $BC = a$;

3) Будуємо $\angle BCA = \angle C$;

4) $\triangle ABC$ — шуканий.

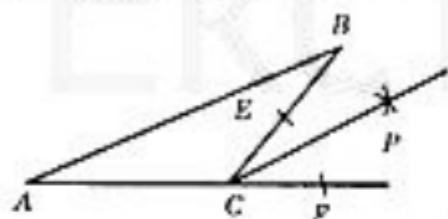
716.



План:

- 1) Будуємо $AB = a$;
- 2) Будуємо $\angle BAC$;
- 3) Будуємо $\angle ABC$;
- 4) $\triangle ABC$ — шуканий.

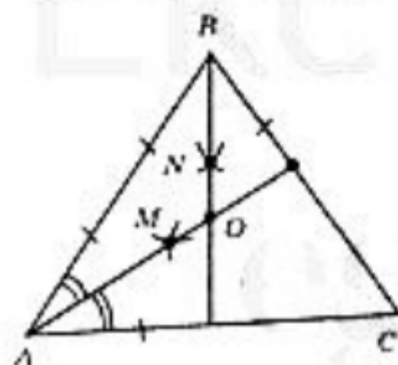
717.



План:

- 1) Відкладаємо рівні відрізки $CE = CF$.
- 2) Будуємо коло з центрами в точках E і F та рівними радіусами, які перетинаються в точці P .
- 3) CP — шукана бісектриса.

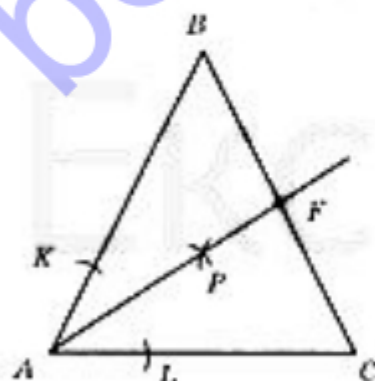
718.



План:

- 1) На сторонах кута A від його вершини відкладаємо рівні відрізки.
- 2) Із утворених точок проводимо кола, які перетнуться в точці M .
- 3) AM — бісектриса кута A .
- 4) Аналогічно будуємо бісектрису кута B .
- 5) Знаходимо точку O — точку перетину бісектрис AM і BN .

719.



- 3) Будуємо бісектрису AP , яка перетне бічну сторону в точці F .

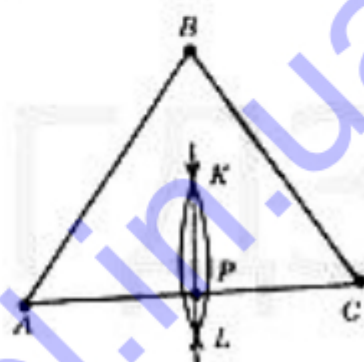
720. 1) Із точок A і B проводимо кола довільного радіуса, які перетинаються в точці D .

2) Із точок A і B проводимо кола більшого радіуса, які перетинаються в точці C .

3) Проводимо пряму CD , яка перетне відрізок AB в точці O .

Точка O буде шуканою, оскільки вона лежить на прямій CD , яка є серединним перпендикуляром.

721.



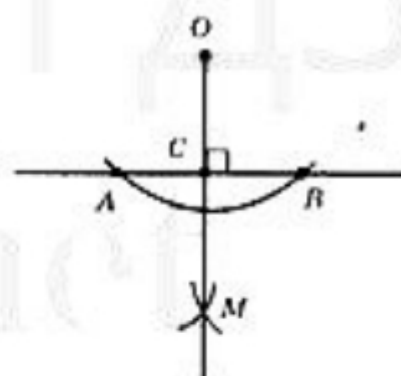
План:

1) Із точок A і C проводимо кола довільного радіуса, які перетинаються в точках K і L .

2) Знаходимо точку P перетину прямої KL та сторони AC .

3) BP — шукана медіана.

722.



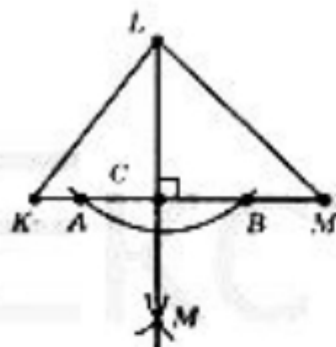
План:

1) Проводимо пряму a і точку O поза нею.

2) Довільним радіусом з точки O проводимо коло, яке перетне пряму a в точках A і B .

3) Із точок A і B тим же радіусом будуємо кола, які перетнуться в точці M .

4) Знаходимо точку C перетину прямої



2) Із точок A і B тим же радіусом будемо кола, які перетнуться в точці M .

3) Знаходимо точку C перетину прямої LM і KM .

4) LC — шукана висота.

724. 1) Від точки C на прямій a відкладемо рівні відрізки $AC = a$.

2) Із отриманих точок проводимо кола більшого радіуса, які перетинаються в точці.

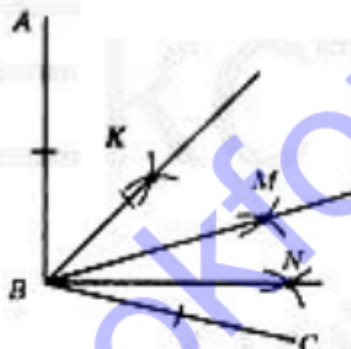
3) Через точку перетину кіл і точку C проводимо пряму.

4) Із точки A проводимо коло радіуса c , яке перетне пряму в точці B .

5) $\triangle ABC$ — шуканий.

Дійсно, $BC \perp AC$, бо BC — серединний перпендикуляр, $AC = a$, $AB = c$.

725.



1) Спочатку поділимо кут ABC навпіл.

2) Проводимо бісектрису BK .

3) Поділимо $\angle KBC$ навпіл.

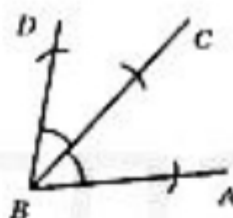
4) Проводимо бісектрису BM .

Тоді $\angle MBC = \frac{1}{4} \angle ABC$.

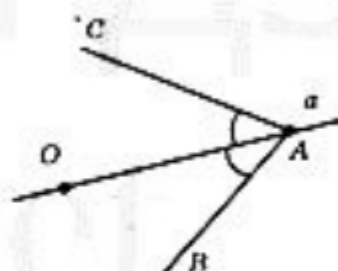
5) Поділимо $\triangle MBC$ навпіл, отримаємо

$\angle NBC = \frac{1}{8} \angle ABC$.

6) Поділивши $\angle NBC$ навпіл, отримаємо



727.



Через дану точку проведемо довільну пряму a , оберемо на даній прямій довільну точку A , побудуємо довільний кут OAC , який дорівнює куту OAB .

728.



1) Щоб побудувати $\frac{1}{4}$ даного відрізка AB , слід розділити його навпіл (O — середина відрізка AB), далі розділити відрізок OB навпіл (O_1 — середина відрізка OB), тоді $O_1B = OO_1 = \frac{1}{4} AB$.

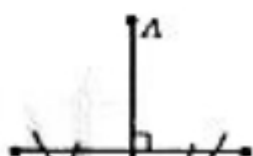
2) Щоб побудувати $\frac{1}{8}$ даного відрізка, треба поділити відрізок O_1B навпіл, а щоб одержати $\frac{1}{16}$ даного відрізка, треба поділити відрізок на 4 рівні частини.

729.

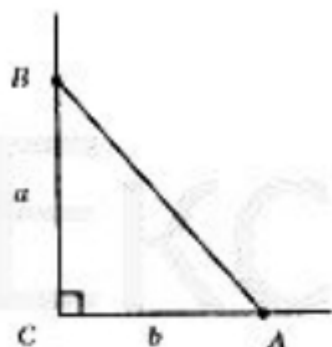


Продовжимо відрізок AB і на продовженні відкладемо $BC = AB$.

730.

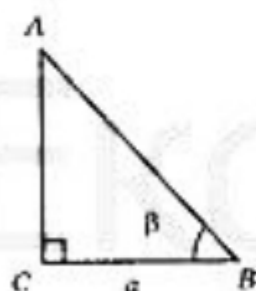


731.



- 1) Будемо прямий кут (задача 722).
- 2) На сторонах кута відкладаємо відрізки $BC = a$, $CA = b$.
- 3) $\triangle ABC$ — шуканий.

732.



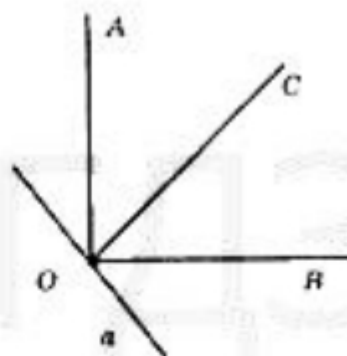
План:

- 1) Будемо прямий кут (задача 722).
- 2) Відкладемо на одній стороні кута відрізок $CB = a$.
- 3) Будемо кут CBA , що дорівнює даному: $\angle CBA = \beta$.
- 4) $\triangle ABC$ — шуканий.

733. План:

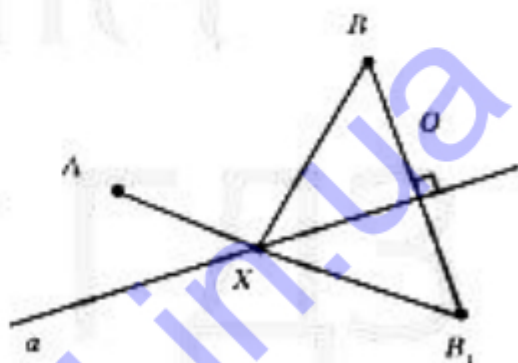
- 1) Проводимо коло довільного радіуса з центром у вершині кута, яке перетинає сторони кута в точках C і B .
- 2) Проводимо коло більшого радіуса з центром у вершині кута, яке перетинає сторони кута в точках N і M .
- 3) Знаходимо точку O перетину відрізків BN і CM .
- 4) AO — шукана бісектриса.

$\triangle ANB = \triangle AMC$ за першою ознакою рівності трикутників ($AN = AM$, $AB = AC$, $\angle A$ — спільний), отже, $\angle ANB = \angle CMA$.
 $\triangle CNO = \triangle BMO$ за другою ознакою рівності трикутників ($CN = BM$, $\angle CNO = \angle BMO$, $\angle NCO = \angle MBO$), отже, $CO = BO$.
 $\triangle ACO = \triangle ABO$ за трьома сторонами, тоді



Застосуйте на практиці

735.



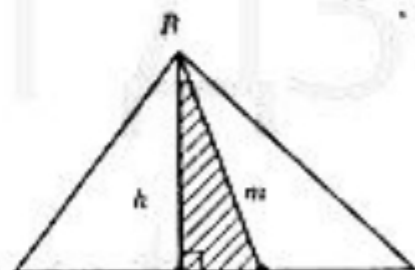
Нехай A і B — населені пункти, a — берег каналу. Із точки B проводимо $BO \perp a$, а потім на продовженні BO відкладемо $B_1O = BO$.
 З'єднаємо A і B_1 , тоді точка X перетину AB_1 і a буде шуканою.

§ 21. Складніші задачі на побудову

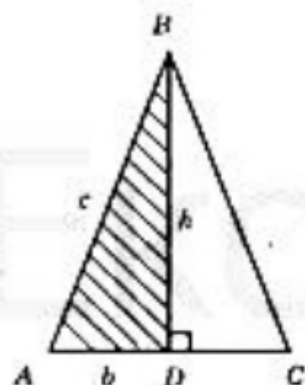
736. Так.

737. Мал. 401. X належить бісектрисі кута B та колу.Мал. 402. X належить бісектрисі кута B та серединному перпендикуляру OX до відрізка BC .Мал. 403. X належить серединному перпендикуляру BO до відрізка AC та колу.

738.

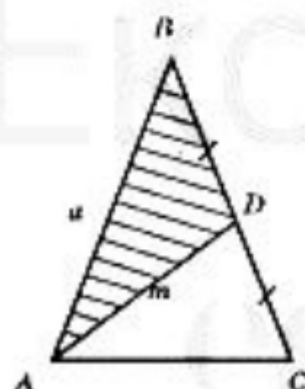


739.



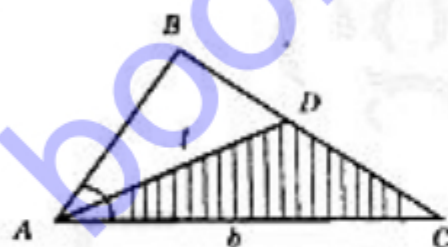
- 1) Спочатку будемо прямокутний трикутник BDA за гіпотенузою c і катетом h .
- 2) На промені AD від точки A відкладемо $AC = b$.
- 3) $\triangle ABC$ — шуканий.

740.



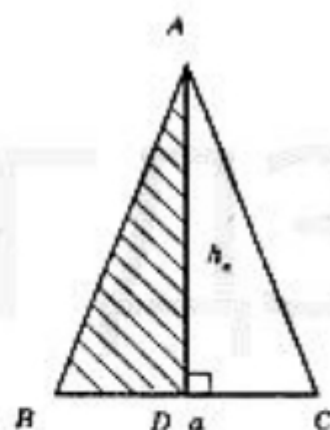
- 1) Будемо трикутник ABD за трьома сторонами $AB = a$, $AD = m$, $BD = \frac{a}{2}$.
- 2) На промені BD від точки D відкладемо $DC = \frac{a}{2}$.
- 3) $\triangle ABC$ — шуканий.

741.



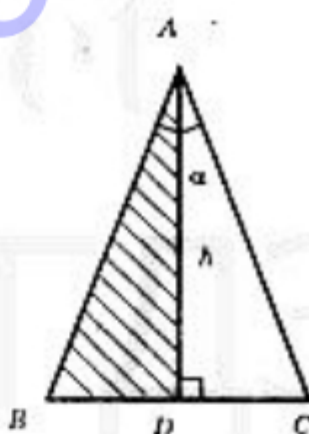
- 1) Будемо $\triangle ADC$ за двома сторонами $AD = l$, $AC = b$ і кутом між ними $\angle DAC = \frac{\alpha}{2}$.

742.



- 1) Будемо прямокутний трикутник ABD за двома катетами: $BD = \frac{a}{2}$ і $AD = h_a$.
 - 2) На промені BD від точки D відкладемо $DC = \frac{a}{2}$.
 - 3) $\triangle ABC$ — шуканий.
- Оскільки AD — висота і медіана трикутника ABC , то $\triangle ABC$ — рівнобедрений, в якому $AD = h_a$, $BC = a$.

743.



- 1) Будемо прямокутний трикутник ABD за катетом $AD = h$ і гострим кутом $\angle BAD = \frac{\alpha}{2}$.
 - 2) На промені BD від точки D відкладемо $DC = BD$.
 - 3) $\triangle ABC$ — шуканий.
- Оскільки AD — висота і медіана трикутника ABC , то $\triangle ABC$ — рівнобедрений, в якому $AD = h$, оскільки AD — бісектриса, то $\angle BAC = \alpha$.

744.



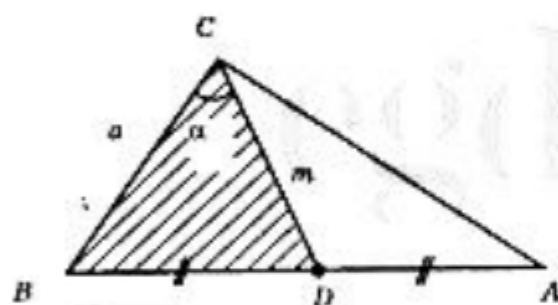
1) Будуємо прямокутний $\triangle BCD$ за гіпотенузою $BC = a$ і катетом $CD = h$.

2) Знаходимо точку A — як точку перетину променя BD та кола з центром у точці C і з радіусом b .

3) $\triangle ABC$ — шуканий.

Оскільки $BC = a$, $CA = b$, $CD \perp AB$, $CD = h$, то $\triangle ABC$ — шуканий.

745.

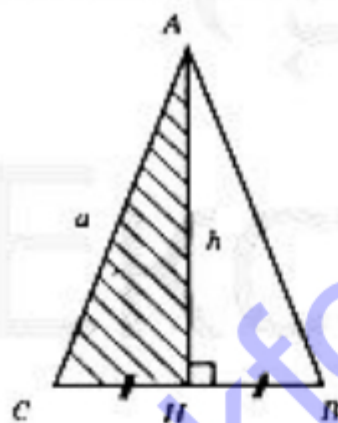


1) Будуємо $\triangle BCD$ за двома сторонами: $BC = a$, $CD = m$ і кутом між ними $\angle BCD = \alpha$.

2) На промені BD від точки D відкладемо $DA = BD$.

3) $\triangle ABC$ — шуканий, оскільки $BC = a$, $\angle BCD = \alpha$, $BD = DA$, $CD = m$.

746.



1) Будуємо прямокутний трикутник ACH за гіпотенузою $AC = b$ і катетом $AH = h$.

2) На промені CH від точки H відкладемо $HV = CH$.

3) $\triangle ABC$ — шуканий.

Оскільки AH — висота і медіана, то $\triangle ABC$ — рівнобедрений, в якому $AC = AB = b$, $AH \perp BC$, $AH = h$.

747.



1) Будуємо прямокутний трикутник AHL за гіпотенузою $AL = l$ і катетом $AH = h$.

2) Від променя AL в різні боки будуємо кути $\angle LAB = \frac{\alpha}{2}$ і $\angle LAC = \frac{\alpha}{2}$.

3) Точки B і C — точки перетину сторін AB і AC побудованих кутів та продовження сторони HL трикутника AHL .

4) $\triangle ABC$ — шуканий, оскільки $AH \perp BC$, $\angle BAL = \angle LAC$, $AL = l$, $\angle BAC = \alpha$.

748. 1) Будуємо $\triangle ADC$ (мал. 408) за трьома сторонами: $AC = b$, $CD = c$, $AD = 2m$.

2) Ділимо сторону AD пополам (точка M — середина AD).

3) На промені CM від точки M відкладемо $MB = CM$.

4) $\triangle ABC$ — шуканий.

749. 1) Будуємо коло з центром у точці O і з радіусом R .

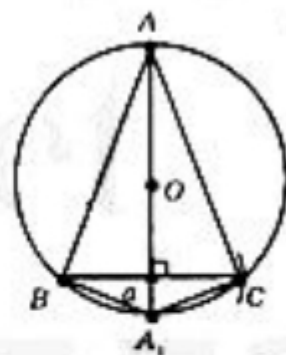
2) З довільної точки A кола будуємо коло радіуса b , яке перетне побудоване коло в точці C .

3) Ділимо відрізок AC пополам (D — середина AC).

4) Із точки D будуємо коло з радіусом m , яке перетне початкове коло в точці B .

5) $\triangle ABC$ — шуканий.

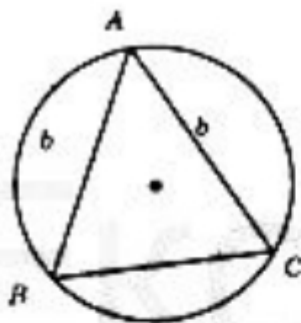
750.



1) Будуємо коло з центром O і з радіусом R .

2) З довільної точки кола B будуємо коло з радіусом a , яке перетне побудоване коло в точці C .

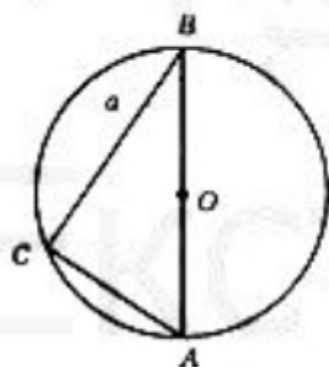
3) Будуємо серединний перпендикуляр



2) З довільної точки A кола будуюмо коло радіуса b , яке перетне побудоване коло в точках B і C .

3) $\triangle ABC$ — шуканий.

752.

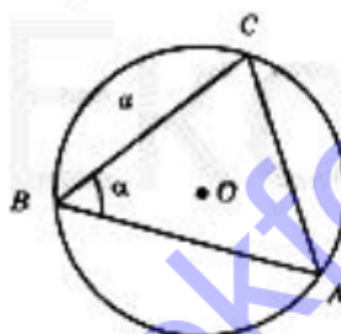


1) Будуюмо коло з центром O і з радіусом R .

2) З довільної точки B кола будуюмо діаметр BA і коло радіуса a , яке перетне побудоване коло в точці C .

3) $\triangle ABC$ — шуканий.

753.



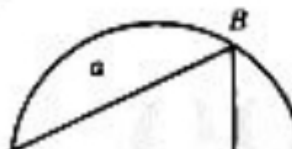
1) Будуюмо коло з центром O і з радіусом R .

2) З довільної точки B кола будуюмо коло з радіусом a , яке перетне побудоване коло в точці C .

3) Від променя BC відкладемо кут $\angle CBA = \alpha$, сторона якого перетне коло в точці A .

4) $\triangle ABC$ — шуканий.

754.

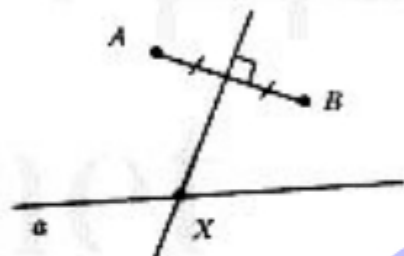


1) Будуюмо коло з центром O і з радіусом R .

2) З довільної точки C кола будуюмо коло радіуса a , яке перетне побудоване коло в точці B , та коло радіуса b , яке перетне початкове коло в точці A .

3) $\triangle ABC$ — шуканий.

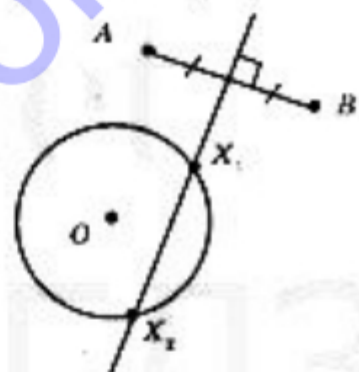
755.



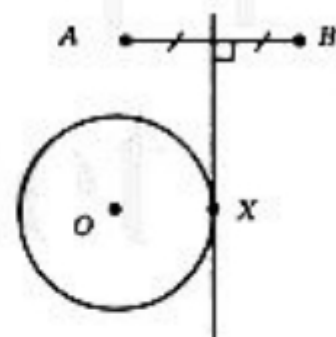
Шукана точка X — точка перетину серединного перпендикуляра до відрізка AB та даної прямої a .

756. Шукана точка X — точка перетину серединного перпендикуляра до відрізка AB та даного кола. Задача має:

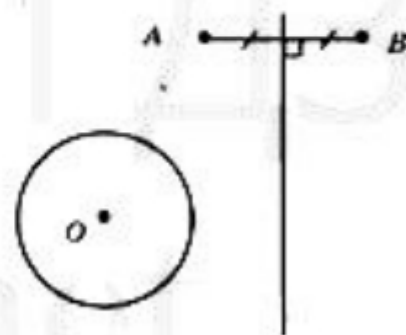
1) або два розв'язки;

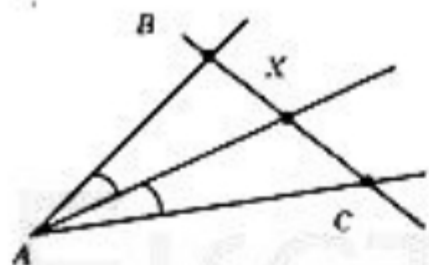


2) або один розв'язок;



3) або жодного.

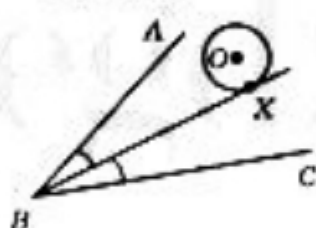
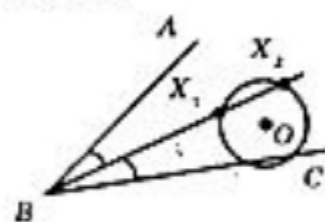




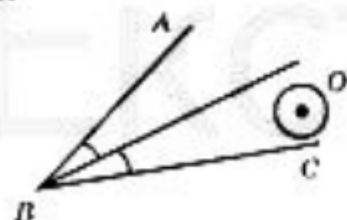
758. Шукана точка X — точка перетину кола і бісектриси BD даного кута ABC . Таких точок може бути:

1) Дві.

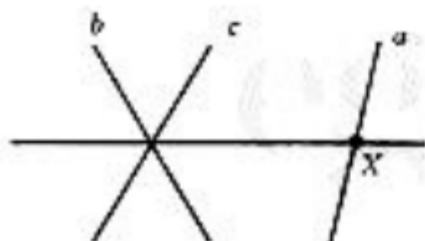
2) Одна.



3) Жодної.



759.



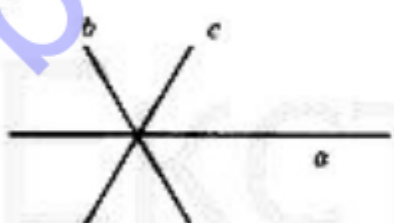
Шукана точка X — точка перетину прямої, що містить бісектрису утворених кутів, та даної прямої a . Задача може мати:

1) Один розв'язок.

2) Два розв'язки.



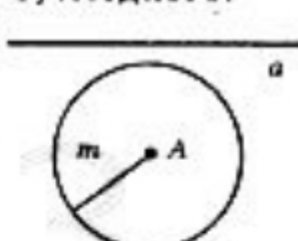
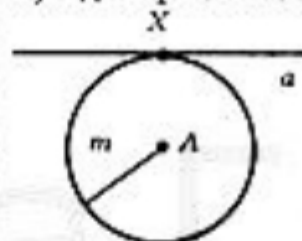
3) Безліч розв'язків.



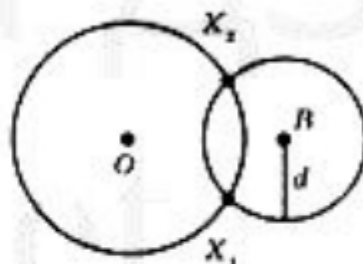
760. Шукана точка X — точка перетину даної прямої a і кола з центром у точці A і радіусом m . Задача може мати:

2) Один розв'язок.

3) Жодного.

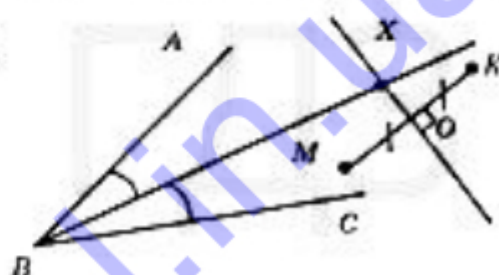


761.



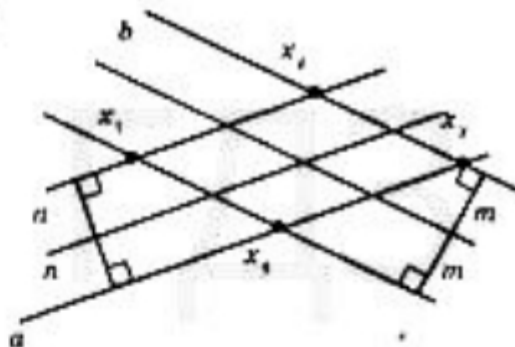
Шукана точка X — точка перетину кола радіуса d з центром в т. B із даним колом.

762.



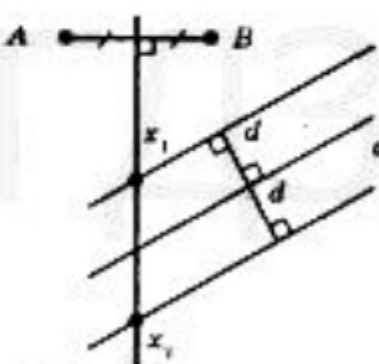
Шукана точка X — точка перетину бісектриси кута ABC та серединного перпендикуляра до відрізка MK .

763.

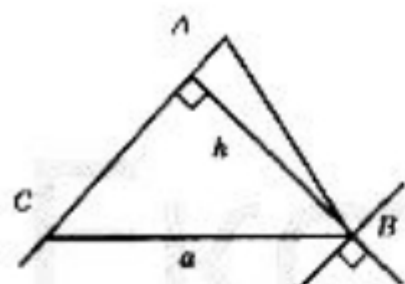


Шукані точки X — точки перетину прямих, які паралельні до a і знаходяться від прямої a на відстані n , та прямих, які паралельні b і знаходяться від прямої b на відстані m .

764.



773.



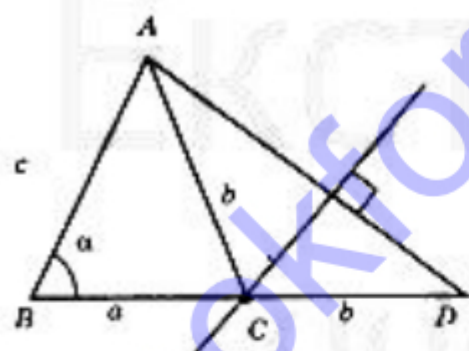
- 1) Будуємо кут A .
- 2) Проводимо пряму b , яка паралельна стороні AC і знаходиться на відстані h від неї. Ця пряма перетне другу сторону кута в точці B .
- 2) Точку C знаходимо як точку перетину променя AC та кола з центром у точці B і з радіусом.
- 4) $\triangle ABC$ — шуканий.

774. 1) Будуємо прямокутний трикутник за катетами (мал. 412) $BC = a$, $CD = b + c$.

- 2) Проводимо серединний перпендикуляр до сторони BD , який перетинає сторону CD в точці A .
- 3) $\triangle ABC$ — шуканий.

Оскільки точка A належить серединному перпендикуляру, то $AD = BC = c$, тоді $AC = b$, $BC = a$.

775.



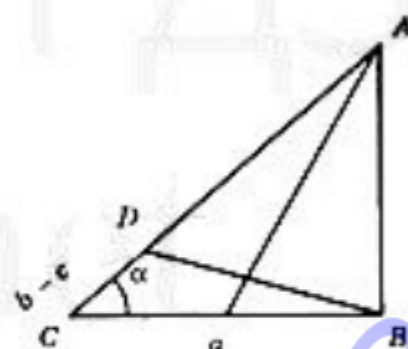
- 1) Будуємо $\triangle ABD$ за двома сторонами: $AB = c$ і $BD = a + b$ і кутом $\angle B = \alpha$.
- 2) Проводимо серединний перпендикуляр до сторони AD , який перетинає сторону BD в точці C .
- 3) $\triangle ABC$ — шуканий.

776.



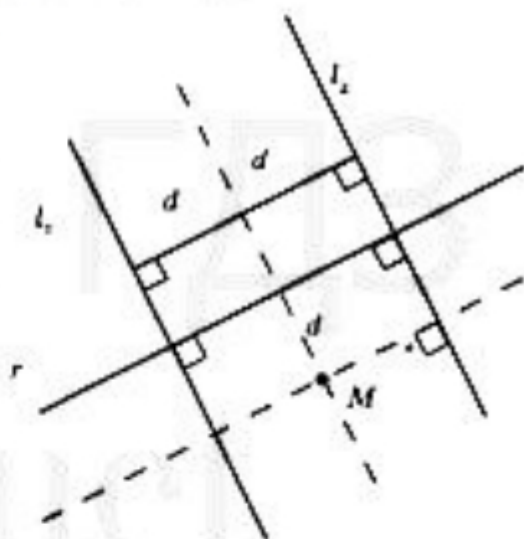
- 1) Будуємо $\triangle BAD$ за двома сторонами $AB = c$, $BD = a + b$, та кутом D , що лежить проти сторони C . $\angle D = 45^\circ$.
- 2) В $\triangle BAD$ із вершини A опускаємо перпендикуляр AC .
- 3) $\triangle ABC$ — шуканий.

777.



- 1) Будуємо $\triangle CBD$, у якого $CB = a$, $CD = b - c$, $\angle C = \alpha$.
- 2) Точку A знаходимо як точку перетину променя CD та серединного перпендикуляра до сторони BD .
- 3) $\triangle ABC$ — шуканий.

Застосуйте на практиці



Базу відпочинку M треба розмістити на перетині прямої, яка паралельна автомагістралі l_1 і l_2 і знаходиться від них на однаковій відстані d , та прямої, яка паралельна річці r і знаходиться від неї на відстані d .

Тестові завдання

